



XXXVI Olimpíada Iberoamericana de Matemáticas

Primeiro dia

19 de outubro de 2021

Problema 1. Seja $P = \{p_1, p_2, \dots, p_{10}\}$ um conjunto de 10 primos distintos e seja A o conjunto de todos os inteiros maiores que 1 tais que em sua decomposição em fatores primos aparecem apenas primos de P . Os elementos de A são coloridos de tal forma que:

- cada elemento de P tem uma cor distinta,
- se $m, n \in A$, então mn tem a mesma cor que m ou n ,
- para qualquer par de cores distintas \mathcal{R} e \mathcal{S} , não existem $j, k, m, n \in A$ (não necessariamente distintos), com j, k da cor \mathcal{R} e m, n da cor \mathcal{S} , tais que j divide m e n divide k .

Prove que existe um primo de P tal que todos os seus múltiplos em A têm a mesma cor.

Problema 2. Considere um triângulo acutângulo ABC , com $AC > AB$, e seja Γ sua circunferência circunscrita. Sejam E e F os pontos médios dos lados AC e AB , respectivamente. A circunferência circunscrita do triângulo CEF e Γ se intersectam em X e C , com $X \neq C$. A reta BX e a tangente a Γ por A se intersectam em Y . Seja P o ponto no segmento AB tal que $YP = YA$, com $P \neq A$, e seja Q o ponto onde se intersectam AB e a paralela a BC que passa por Y . Prove que F é o ponto médio de PQ .

Nota: A circunferência circunscrita de um triângulo é a circunferência que passa pelos seus três vértices.

Problema 3. Seja a_1, a_2, a_3, \dots uma sequência infinita de inteiros positivos e seja b_1, b_2, b_3, \dots a sequência infinita de números reais dada por

$$b_n = \frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}, \text{ para } n \geq 1.$$

Prove que se em cada um milhão de termos consecutivos da sequência b_1, b_2, b_3, \dots existe pelo menos um que é inteiro, então existe algum k tal que $b_k > 2021^{2021}$.

*Tempo: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos*