XXXVI Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

Segundo dia

20 de outubro de 2021

Problema 4. Sejam a, b, c, x, y, z números reais tais que

$$a^2 + x^2 = b^2 + y^2 = c^2 + z^2 = (a+b)^2 + (x+y)^2 = (b+c)^2 + (y+z)^2 = (c+a)^2 + (z+x)^2.$$

Prove que $a^2 + b^2 + c^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Problema 5. Para um conjunto finito C de inteiros, define-se $S(C)$ como a soma dos elementos de C. Encontre dois conjuntos não vazios A e B cuja interseção é vazia, cuja união é o conjunto $\{1, 2, \ldots, 2021\}$ e tais que o produto $S(A)S(B)$ é um quadrado perfeito.

Problema 6. Considere um polígono regular de n lados, $n \geq 4$, e seja V um subconjunto de r vértices do polígono. Prove que se $r(r-3) \geq n$, então existem pelo menos dois triângulos congruentes cujos vértices pertencem a V.

Tempo: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos