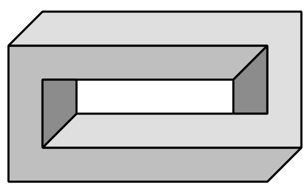
XXXIV OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICAS

MEP - UCR - TEC - UNA - UNED - MICITT

SOLUCIÓN
PRIMERA ELIMINATORIA NACIONAL



Nivel I

(7°)

2022

Estimado estudiante:

La Comisión de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas 2022 le saluda y le da la más cordial bienvenida a la Primera Eliminatoria Nacional de estas justas académicas, deseándole los mayores éxitos.
La prueba consta de un total de 20 preguntas de selección única.

Puede consultar la lista de estudiantes clasificados a partir del **viernes 8 de Julio**, en la siguiente dirección electrónica:

www.olcoma.ac.cr

INDICACIONES GENERALES

- Esta eliminatoria tiene un formato virtual por tanto las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en la plataforma de EstudiaU de la UNED.
- Debe trabajar en forma individual.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no necesariamente están hechos a escala.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A yB	$\angle ABC \approx \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P - Q - R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre los puntos P y R

I Parte: Selección única **Valor 40 puntos, 2 puntos c/u**

1. La suma de los divisores positivos de 2022 corresponde a:
   (a) 4056
   (b) 4050
   (c) 3382
   (d) 3376

- Opción correcta: (a)
- Solución:

Los divisores positivos de 2022 son $1, 2, 3, 6, 337, 674, 1011, 2022$ y su suma corresponde a 4056

2. Bryan tiene una colección de carritos de juguete, se sabe que tiene menos de 100 carritos y que al acomodarlos en filas de 10 le sobran 2, y si los acomoda en filas de 9 le sobra 1, entonces el número de carritos que tiene Bryan corresponde a

   (a) 62
   (b) 72
   (c) 82
   (d) 92

- Opción correcta: (c)
- Solución:

Al dividir la cantidad de carritos por 10 sobran 2 y al dividir la cantidad de carritos por 9 sobra 1, por lo que la cantidad de carritos es 82

3. Un número se llama *Chonete* si es mayor que el cuadrado de la suma de sus dígitos, por ejemplo el número 231 es *Chonete* porque $231 > (2+3+1)^2$, entonces la cantidad de números *Chonete* de dos dígitos corresponde a:

   (a) 27
   (b) 23
   (c) 22
   (d) 21

- Opción correcta: (d)
- Solución:

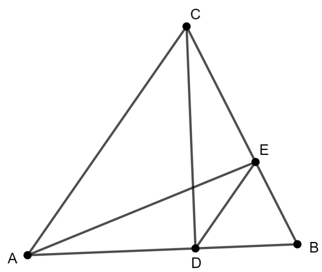
Puede notarse que en los 10's, 20's, 30's, 40's, 50's hay 3 números *Chonete* en cada decena, en los 60's y 70's sólo hay 2 y en las decenas 80's y 90's sólo hay uno, por lo que en total hay 21 números *Chonete*

4. Considere el $\triangle ABC$ acutángulo. Sean D y E puntos en $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, respectivamente, tal que $\overline{AC} \parallel \overline{DE}$. Si m$\angle ABC = 30°$, m$\angle EDB = 70°$ y m$\angle CAE = 12°$, entonces la medida del ángulo AEB corresponde a

   (a) 92°
   (b) 100°
   (c) 88°
   (d) 110°

- Opción correcta: (a)
- Solución: Observe que m$\angle BED = 80°$ por suma de ángulos internos. Luego m$\angle AED = 12°$ por alternos internos.

  Y así, m$\angle AEB = 92°$.



5. Sean m y n números enteros positivos tales que $m > n$. Si al dividir m por n se obtiene cociente 20 y residuo 9, entonces el residuo que se obtiene al dividir $3m$ por 5 corresponde a

   (a) 1
   (b) 2
   (c) 3
   (d) 4

- Opción correcta: (b)
- Solución: Como al dividir m por n se obtiene cociente 20 y residuo 9, entonces por el algoritmo de la división se tiene que $m = 20n + 9$.

  Luego $3m = 60n + 27 \Longrightarrow 3m = 5 \cdot 12n + 25 + 2 \Longrightarrow 3m = 5(12n + 5) + 2$.

  Y así el residuo de dividir $3m$ por 5 es 2.

6. Cierta plataforma de streaming (proyección de películas en línea) contiene en su cartelera únicamente películas de terror, comedia y drama. Si hay 100 películas de drama y representa un 40 % del total de películas de la plataforma, y además las películas de terror es un 20 % de las de comedia, entonces ¿cuántas películas de terror tiene la plataforma?

   (a) 35
   (b) 15
   (c) 30
   (d) 25

- Opción correcta: (d)
- Solución: Dado que son 100 películas de drama y representan un 40 % del total, entonces la plataforma tiene $100 \div 0{,}4 = 250$ películas en su cartelera. Ahora, hay 150 películas entre el género de terror y comedia, y como las de terror son el 20 % de las de comedia, entonces hay $150 \div 1{,}2 = 125$ películas de comedia, y por tanto hay 25 películas de terror.

7. Carlos tiene cierta cantidad de postales y las repartirá entre 3 amigos. Al primero le da las dos terceras partes del total de postales, al segundo le da una quinta parte de lo que le dió al primero, y al tercero le da las restantes que corresponden a 30 postales. ¿Cuántas postales recibió el segundo amigo?

   (a) 25
   (b) 30
   (c) 45
   (d) 20

- Opción correcta: (d)
- Solución: Como el segundo amigo recibió una quinta parte de lo que recibió el primero, al segundo le corresponde $2/15$ del total. Luego, las 30 postales equivalen a $1 - 2/3 - 2/15 = 1/5$ del total, por lo que en total hay 150 postales. De este modo al segundo le corresponden $150 \cdot 2/15 = 20$ postales.

8. Cinco personas juegan un torneo de tenis de mesa, cada jugador debe enfrentarse a los demás. Si gana obtiene 2 puntos, si empata obtiene 1 punto y si pierde 0 puntos. Al final del torneo se presentó la menor cantidad de partidos ganados de forma que todos los participantes teníian una cantidad distinta de puntos. Si sumamos los puntos obtenidos por cada jugador en los partidos empatados, el resultado corresponde a

   (a) 20

   (b) 16

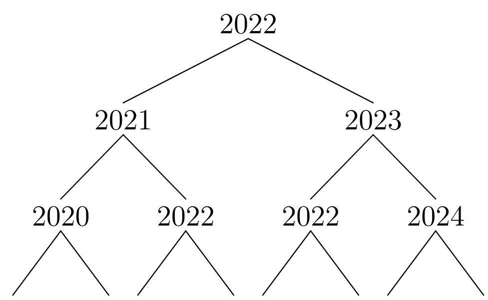
   (c) 14

   (d) 12

- Opción correcta: (c)
- Como cada jugador se enfrenta a 4 rivales entonces hay en total 10 partidos $\dfrac{5 \cdot 4}{2} = 10$. No es posible que los 10 partidos terminen en empate ya que todos los jugadores tendría los mismos puntos. Si hay 1 o 2 ganes habrá empates en la tabla de posiciones, deben haber como mínimo 3 ganes para asegurarnos de que todos tengan puntuaciones diferentes. Es decir hay 7 empates y cada persona obtiene un punto, en total suman 14.

9. Se genera un diagrama como el siguiente, en el cual se inicia con 2022 y en el primer paso se generan dos números, restando y sumando uno al anterior. En el segundo paso se hace lo mismo con cada uno de los dos números obtenidos en el paso anterior. Si se continúa de la misma forma y de los números obtenidos en el cuarto paso se toma uno al azar, la probabilidad de que el número tomado sea 2022 corresponde a

   (a) $\frac{3}{8}$
   (b) $\frac{1}{16}$
   (c) $\frac{3}{16}$
   (d) $\frac{1}{8}$



- Opción correcta: (a)
- Solución:
  Como se observa en el diagrama, en el segundo paso se obtienen 4 números: 2020, 2022, 2022, 2024.
  Al restar y sumar 1 a cada uno de ellos, en el tercer paso se obtienen 8 números: 2019, 2021, 2021, 2023, 2021, 2023, 2023, 2025.
  Finalmente en el cuarto paso se obtienen 16 números: 2018, 2020, 2020, 2022, 2020, 2022, 2022, 2024, 2020, 2022, 2022, 2024, 2022, 2024, 2024, 2026. Se observa que hay 6 de ellos que son 2022.
  Por lo tanto la probablidad es $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

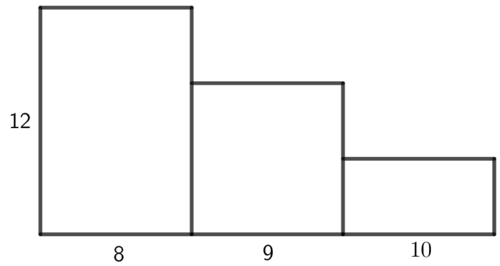
10. En una caja se tienen 2021 bolas rojas, 2022 bolas blancas y 2023 bolas azules, cuya única diferencia es el color. La cantidad mínima de bolas que deben sacarse para tener certeza que se sacaron bolas de los tres colores diferentes es

    (a) 2025
    (b) 4044
    (c) 4046
    (d) 6066

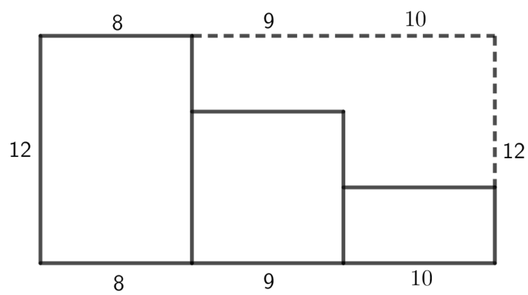
- Opción correcta: (c)
- Solución:
  La peor situación sería que se extraigan primero solamente bolas azules y blancas, para lo cual se da un máximo de $2023 + 2022 = 4045$ bolas. Una vez extraídas estas, la siguiente bola en sacarse necesariamente será roja y se tiene certeza de tener bolas de los tres colores. Por lo tanto, la mínima cantidad es $2023 + 2022 + 1 = 4046$

11. De acuerdo con los datos que proporciona la figura adjunta, formada por 3 rectángulos, el perímetro corresponde a

(a) 39
(b) 78
(c) 162
(d) 324



- Opción correcta: (b)
- Solución: Se proyectan algunos de los lados de la figura para formar un rectángulo:



Luego el perímetro está determinado por $12 + 8 + 9 + 10 + 12 + 10 + 9 + 8 = 78$

12. María, Victoria, Deborah y Natalia participaron de una Olimpiada de Matemática y una de ellas obtuvo una medalla. El tutor, quién desconoce los resultados obtenidos, les consulta cómo les fue. Ellas responden de la siguiente forma:

    - Deborah: María obtuvo medalla.
    - María: Victoria obtuvo medalla.
    - Victoria: María no obtuvo medalla.
    - Natalia: Profe no obtuve medalla.

    Si tres de ellas mienten, entonces ¿quién obtuvo medalla?

    (a) María
    (b) Victoria
    (c) Deborah
    (d) Natalia

- Opción correcta: d
- Solución:

Si Deborah es la que dice la verdad entonces María tendría medalla pero Natalia diría una mentira y entonces si obtuvo medalla, lo cual es contradictorio porque solo una obtuvo medalla.
Si María es la que dice la verdad entonces Victoria tendría medalla pero Natalia diría una mentira y entonces si obtuvo medalla, lo cual es contradictorio porque solo una obtuvo medalla.
Si Victoria es la que dice la verdad entonces María no obtuvo medalla, como Deborah miente entonces reafirma que María no obtuvo medalla, María también miente y entonces Victoria no obtuvo medalla. Finalmente Natalia miente y por lo tanto si obtuvo medalla. Como el razonamiento no tiene contradicciones entonces Natalia es la que obtuvo medalla.
Si Natalia dice la verdad entonces María, Victoria y Deborah mienten, sin embargo, este razonamiento genera una contradicción.

13. En mi colegio Juan, Carlos y Abel trabajan en diferentes puestos: misceláneo, profesor de matemáticas y bibliotecario. Se sabe que alguno de ellos ha trabajado 10 años, otro 5 años y el otro 2 años. El misceláneo le ha dicho a Abel que sus alumnos hacen mucha bulla, Carlos es más antiguo que el profesor, pero no tanto como el misceláneo. Juan ha visto salir a muchas generaciones de estudiantes. Es cierto que

    (a) Abel trabaja como profesor del colegio hace 10 años.

    (b) Carlos trabaja como profesor de matemáticas.

    (c) Juan trabaja como misceláneo.

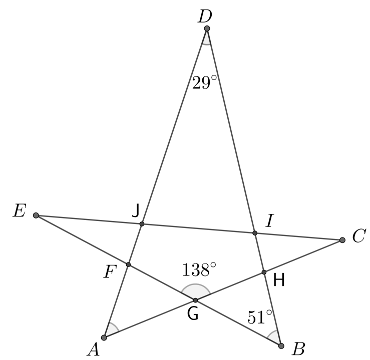
    (d) el bibliotecario tiene 2 años de trabajar en el colegio.

- Opción correcta: (c)

  Solución:

	Misceláneo	Prof. Matemáticas	Bibliotecario	Años
Juan	ok	X	X	10
Carlos	X	X	ok	5
Abel	X	ok	X	2

14. Considere la siguiente figura adjunta:



Según la información anterior, la $m\angle FAG$ corresponde a

(a) 42°

(b) 58°

(c) 80°

(d) 87°

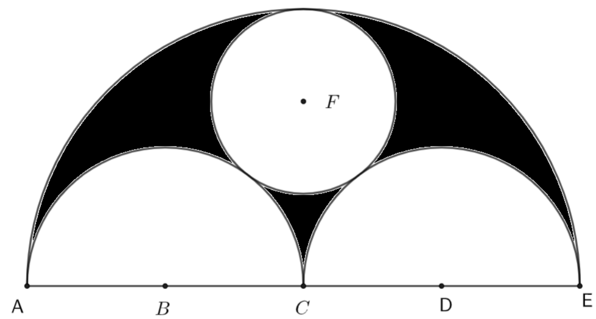
- Opción correcta: (b)
- Solución: Se aplica el teorema de la suma de las medidas de los ángulos internos en el $\triangle BDF$, se tiene que $m\angle DFB = 180° - (29° + 51°) \Rightarrow m\angle DFB = 100°$.

  Observe que el $\angle AGF$ y el $\angle FGH$ son suplementarios, entonces la $m\angle AGF = 180° - 138° = 42°$.

  Por otro lado, se tiene que el $\angle JFG$ y el $\angle GFA$ son suplementarios, entonces la $m\angle GFA = 180° - 100° = 80°$.

  Se aplica otra vez el teorema de la suma de las medidas de los ángulos internos en el $\triangle AGF$, se tiene que $m\angle FAG = 180° - (80° + 42°) \Rightarrow m\angle GFA = 58°$.

15. En la siguiente figura $AB = BC = CD = DE = 3$ y el radio de la circunferencia de centro F es 2.



Según la información anterior, el área de la región sombreada corresponde a

(a) $4\pi\,\text{cm}^2$

(b) $5\pi\,\text{cm}^2$

(c) $9\pi\,\text{cm}^2$

(d) $14\pi\,\text{cm}^2$

- Opción correcta: (b)
- Solución: Se tiene que $AB = BC = 3$, entonces el radio de C_1 mide 6. El área es $\dfrac{6^2 \cdot \pi}{2} = 18\pi$.

  Por otro lado se tiene que $AB = CD = 3$, entonces el radio de C_2 y C_3 mide 3. El área es $3^2 \cdot \pi = 9\pi$.

  Se sabe que el radio de la circunferencia C_4 mide 2. Entonces el área es $2^2 \cdot \pi = 4\pi$.

  Para encontrar el área de la región sombreada, se procede a C_1 restarle el área de C_2, C_3 y C_4. Es decir;

$$18\pi - (9\pi + 4\pi) = 5\pi$$

16. La suma de tres números naturales consecutivos es 2022. El resultado que se obtiene al sumar los últimos dígitos de los tres números consecutivos corresponde a

    (a) 12

    (b) 15

    (c) 18

    (d) 21

- Opción correcta: (a)
- Solución: Se obtiene la siguiente ecuación: $n-1+n+n+1 = 2022 \Rightarrow 3n = 2022 \Rightarrow n = 674$. Los tres números consecutivos obtenidos: $673, 674$ y 675. Al sumar los últimos dígitos de los tres números se obtiene que es 12.

17. Beto trabaja en una frutería donde venden bananos, peras y mangos. Cada banano pesa 150 gramos, cada pera pesa 275 gramos y cada mango pesa 500 gramos. Carlos selecciona algunas frutas y las pone en la balanza. Sin ver las frutas que Carlos lleva, Beto observa que el peso total es 2,25 kg (es decir, 2250 g). Con total certeza, Beto puede decir que Carlos lleva
    (a) al menos 5 bananos.
    (b) no más de 5 peras.
    (c) un número par de peras.
    (d) un número par de mangos.

- Opción correcta: (c)
- Solución: Sean b, p y m el número de bananos, peras y mangos que Carlos lleva. Tenemos entonces la relación

$$150b + 275p + 500m = 2250.$$

El máximo divisor común de 150, 275, 500 y 2250 es 25, por lo que podemos dividir la ecuación anterior por 25 para simplificar y obtener

$$6b + 11p + 20m = 90.$$

Esta ecuación tiene múltiples soluciones en enteros no negativos. Aunque es posible encontrar todas las soluciones, esto no es necesario. Algunas soluciones sencillas de encontrar son $(b, p, m) = (15, 0, 0)$, $(b, p, m) = (5, 0, 3)$, $(b, p, m) = (4, 6, 0)$. Al considerar el caso $(b, p, m) = (4, 6, 0)$ descartamos la opción (a) y (b); al considerar la opción $(b, p, m) = (5, 0, 3)$, descartamos la opción (d). Por lo tanto, la única opción que puede ser correcta sería la opción (c).

Para ver que en efecto esta opción es correcta, observamos que

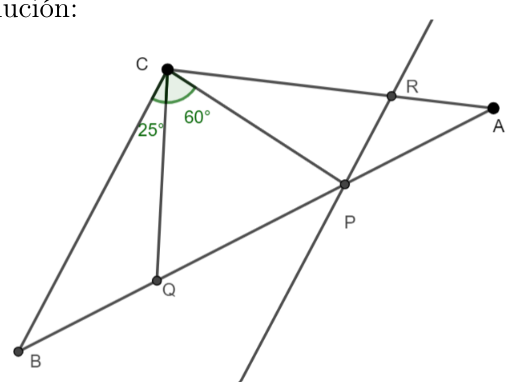
$$11p = 90 - 6b - 20m = 2(45 - 3b - 10m).$$

Como el lado derecho es par, entonces $11p$ es par, lo que implica que la cantidad de peras que Carlos lleva es par.

18. En el triángulo ABC el segmento AB es el lado mayor. Los puntos P y Q son tales que $A - P - Q - B$ y $PC = QC$. El punto R es tal que R en el interior de $\overline{AC}$ y $\overleftrightarrow{PR} \parallel \overleftrightarrow{CB}$. Además $m\measuredangle PCQ = 60°$ y $m\measuredangle QCB = 25°$. La medidad del ángulo APR corresponde a

    (a) 25°
    (b) 35°
    (c) 60°
    (d) 90°

- Opción correcta: (b)
- Solución:



Como $PC = QC$ y $m\measuredangle PCQ = 60°$, entonces $m\measuredangle CQP = m\measuredangle CPQ = 60°$.

El $\angle CQP$ es externo del triángulo BQC, entonces $m\measuredangle CQP = m\measuredangle QCB + m\measuredangle QBC$.

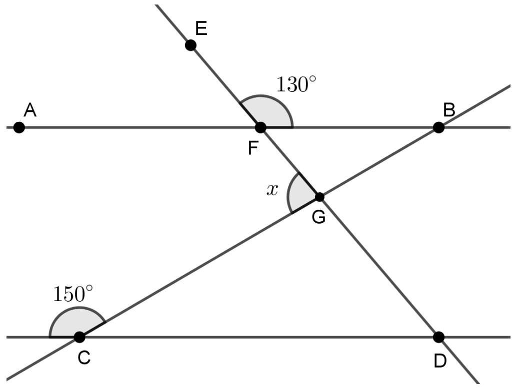
$\Rightarrow 60° = 15° + m\measuredangle QBC$

$\Rightarrow 35° = m\measuredangle QBC$

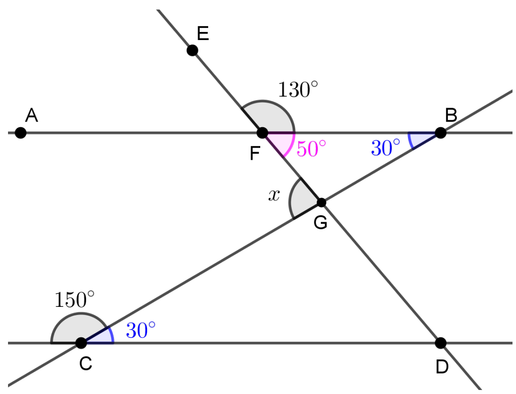
Como $\overleftrightarrow{PR} \parallel \overleftrightarrow{CB}$ y $\overleftrightarrow{AB}$ es una transversal, los ángulos $\measuredangle QBC$ y $\measuredangle APR$ son correspondientes, entonces $m\measuredangle QBC = m\measuredangle APR = 35°$.

19. Si $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y las rectas ED y CB se cortan en G como se muestra en la figura, entonces el valor de x corresponde a

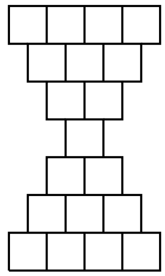
(a) 40°
(b) 80°
(c) 100°
(d) 140°



- Opción correcta: (b)
- Solución: Como las rectas son paralelas los ángulos alternos internos en C y en B miden 30°, además el $\angle GFB = 50°$, finalmente por el teorema del ángulo externo, $x = 30° + 50° = 80°$



20. En la siguiente figura, cada cuadrado pequeño tiene área 1, entonces el perímetro de la figura corresponde a



   (a) 19
   (b) 22
   (c) 28
   (d) 29

- Opción correcta: (c)
- Solución:

Cada base tiene lado 4, y cada altura tiene lado 7. Además, se debe completar 6 adicionales de los trozos generados en cada salto de nivel. Por lo que el perímetro es 28.

Items II Eliminatoria

21. Considere una pieza (engranaje) formada por 4 ruedas dentadas como se muestra en la figura. Se colocan en fila 200 de estas piezas, de tal forma que la rueda 4 de cada pieza (excepto la última) engrane (encaje o enlace) con la rueda de 1 de la pieza siguiente. La ruedas se enumeran desde 1 a 800 en el orden que se enumeraron las cuatro primeras, además, la rueda 1 se hace girar en el sentido horario (conforme a las manecillas del reloj). Según la información anterior, considere las siguientes proposiciones

    I) La rueda 288 gira en sentido horario.

    II) La rueda 369 gira en sentido horario.

    III) La rueda 453 gira en sentido anti horario.

    IV) La rueda 535 gira en sentido anti horario.

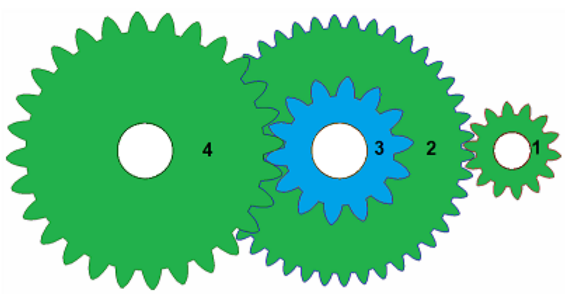
    De ellas son verdaderas

    (a) I y II

    (b) II y III

    (c) III y IV

    (d) I y IV



- Opción correcta: (b)
- Note como hay un patrón en el sentido con que giran las ruedas, el cual se repite cada 8.

Rueda	1	2	3	4	5	6	7	8
Sentido	H	A	A	H	A	H	H	A
Dibujo	↻	↺	↺	↻	↺	↻	↻	↺

H: horario, A: anti horario

Por otra parte se tiene que:

a) $288 = 8 \cdot 36$ entonces la rueda 288 gira similar a la rueda 8, anti horario, por lo tanto I es falsa.

b) $369 = 8 \cdot 46 + 1$, la rueda 369 gira similar a la rueda 1, horario, por lo tanto II es verdadera.

c) $453 = 8 \cdot 56 + 5$,la rueda 453 gira similar a la rueda 5, anti horario, por lo tanto III es verdadera.

d) $535 = 8 \cdot 66 + 7$, la rueda 535 gira similar a la rueda 7, horario, por lo tanto IV es falsa.

Analizar IIE Desarrollo

22. El dígito de las unidades de la suma $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{2022}$ corresponde a

   (a) 4

   (b) 6

   (c) 7

   (d) 8

- Opción correcta: (c)
- Solución: La suma dada es equivalente a $2^0+2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{2022} = 1+2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{2022}$.

  Se observa que:

  - $2^1 = 2$
  - $2^2 = 4$
  - $2^3 = 8$
  - $2^4 = 16$
  - $2^5 = 32$
  - $2^6 = 64$
  - $2^7 = 128$
  - $2^8 = 256$

  De acuerdo con lo anterior, se identifica que en las potencias de dos, cada cuatro veces se repite el último dígito. Como se tiene 2022 potencias de dos. Por el algoritmo de la división se tiene que $2022 = 4 \cdot 505 + 2$. Se puede realizar 505 agrupaciones y sobran las últimas dos potencias de dos, es decir;

  $\left(2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4\right) + \cdots + \left(2^{2017} + 2^{2018} + 2^{2019} + 2^{2020}\right) + 2^{2021} + 2^{2022}$

  El último dígito de 2^{2021} es 2 y 2^{2022} es 4.

  En cada agrupación, al sumar el último dígito de las potencias de dos, la última cifra que se obtiene es cero.

  Por lo tanto, la última cifra de la suma

  $1 + \left(2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4\right) + \cdots + \left(2^{2017} + 2^{2018} + 2^{2019} + 2^{2020}\right) + 2^{2021} + 2^{2022} = 1 + 0 + 0 + \cdots + 0 + 2 + 4 = 7.$

23. La cantidad de números de 3 dígitos que tienen exactamente una vez a los dígitos 2 y 6, y que además son divisibles por 33, corresponde a:
    (a) 0
    (b) 2
    (c) 4
    (d) 6

- Opción correcta: (b)
- Solución:

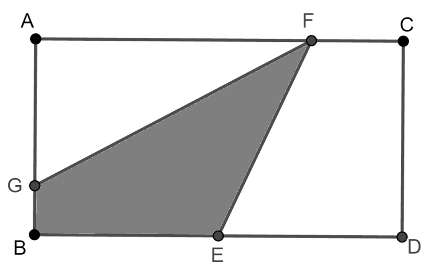
Sea a el dígito que falta para formar el número buscado, como el números es divisible por 33, entonces es divisible por 3 y por 11.

Al ser divisible por 3, entonces $2 + 6 + a$ debe ser múltiplo de 3, por lo que a puede tomar los valores de $1, 4, 7$

Como además debe ser divisible por 11, entonces la suma de dos números debe ser igual al tercero, y por paridad, a sólo puede tomar el valor 4, así, los números que se pueden formar son 264 y 462.

24. En la figura que se muestra, el cuadrilátero ABDC es un rectángulo cuyo perímetro mide 52 cm y la m$\overline{AC} = 18$ cm. Si E es el punto medio de $\overline{BD}$, $AC = 4 \cdot FC$ y $AB = 4 \cdot GB$, entonces la medida del área sombreada corresponde a

    (a) $\dfrac{45}{2}$ cm^2
    (b) $\dfrac{99}{2}$ cm^2
    (c) 45 cm^2
    (d) 99 cm^2



- Opción correcta: (b)
- Solución: Como el perímetro del rectángulo $ABDC$ es 52, entonces $AB = CD = 8$. Luego el área del rectángulo $ABDC$ corresponde a $18 \cdot 8 = 144$ cm^2. Luego, el área del triángulo AGF es $\dfrac{\frac{27}{2} \cdot 6}{2} = 81/2$ y el área del trapecio $DCFE$ es $\dfrac{\left(9 + \frac{9}{2}\right) \cdot 8}{2} = 54$. Así el área sombreada es $144 - 81/2 - 54 = 99/2$.

II Nivel*

25. Si la suma de los dígitos del número $3 \cdot 2^{2022} \cdot 5^{2023} - 3$ se puede escribir de la forma $2022a + b$, con a y b enteros positivos entonces el valor de $a + b$ corresponde a

   (a) 12
   (b) 21
   (c) 22
   (d) 20

- Opción correcta: (a)
- Solución: Observe las potencias:

$$3 \cdot 2^{2022} \cdot 5^{2023} - 3 =$$
$$3 \cdot 2^{2022} \cdot 5 \cdot 5^{2022} - 3 =$$
$$3 \cdot 2^{2022} \cdot 5 \cdot 5^{2022} - 3 =$$
$$15 \cdot 10^{2022} - 3 =$$
$$15 \cdot \overbrace{000 \cdots 000}^{2022} - 3$$
$$14 \cdot \overbrace{999 \cdots 999}^{2021}7.$$

Por lo tanto, la suma sus dígitos es

$9 \cdot 2021 + 7 + 4 + 1 = 9 \cdot 2021 + 9 + 3 = 9 \cdot 2022 + 3 = 2022a + b.$

Por lo tanto $a = 9$, $b = 3$ y $a + b = 12$

II Nivel

26. En una caja se tienen 2021 bolas rojas, 2022 bolas blancas y 2023 bolas azules, cuya única diferencia es el color. Si se sacan dos bolas al azar, la probabilidad de que ambas sean blancas es

    (a) $\frac{1}{9}$
    (b) $\frac{1}{1\,011}$
    (c) $\frac{2021}{18\,195}$
    (d) $\frac{12\,128}{18\,195}$

- Solución:
  En total se tienen 6066 bolas. La probabilidad de que la primera sea blanca es $\frac{2022}{6066} = \frac{1}{3}$.
  Una vez extraída la primera bola, quedan 6065 en la caja, de las cuales 2021 son blancas, por lo que la probabilidad de que la segunda sea blanca es $\frac{2021}{6065}$.
  La probabilidad de que ambas sean blancas es $\frac{1}{3} \cdot \frac{2021}{6065} = \frac{2021}{18\,195}$

27. Alejandro esta escribiendo números que cumplan dos condiciones:
    - Ser de dos dígitos.
    - Ser divisible por los dos dígitos que lo componen.

    La cantidad de números que cumplen las dos condiciones descritas es:

    (a) 9
    (b) 14
    (c) 16
    (d) 19

- Opción correcta: (b)
- Solución:
  Al ser un numero de dos cifras, debe estar entre 10 y 99.
  Todos los múltiplos de 11 en el rango establecido cumplen la condición, pues si tomamos un numero del 1 al 9 y lo multiplicamos por 11, el resultado estará compuesto por el número elegido tanto en las unidades como en las decenas.
  Así tenemos los valores: $11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99$
  Busquemos los otros números.
  Sea ab el numero de dos cifras.
  Por notación desarrollada tenemos ese numero es $a \cdot 2 \cdot 5 + b$
  Para que el numero sea divisible por a y por b, se deduce que b debe ser igual a a, o el doble o el quíntuple de a.
  Para el caso de b sea doble de a tenemos los números 12, 24, 36, 48.
  Para que b sea el quíntuple de a se tiene 15.

En total encontramos 14 números con estas características.

28. Marco coloca en el banco 150000 colones en una cuenta de ahorros. Mensualmente aporta 100000 colones a esta cuenta. En determinado momento Marco debe interrumpir el ahorro y usar parte del dinero para solventar una necesidad. En ese momento marco gasta la mitad del dinero disponible en la cuenta y le quedan mas de 3175000. La cantidad mínima de meses que Marco abonó a la cuenta de ahorros corresponde a:

    (a) 61
    (b) 63
    (c) 65
    (d) 67

- Opción correcta: (b)
- Solución:
  Considerando x como la cantidad de meses que se ahorra, tenemos la siguiente ecuación
  $\dfrac{x \cdot 100000 + 150000}{2} = 3175000$
  $\Rightarrow x \cdot 100000 + 150000 = 635000$
  $\Rightarrow x \cdot 100000 = 6200000$
  $x = 62$
  Como sabemos que la cantidad de dinero debe ser mayor a 3175000, entonces la cantidad de meses debe ser mayor a 62, como mínimo 63 meses.

Desarrollo IIE IN, modificar solución.

29. En el resultado de $12^{1821} \cdot 12^{1822} \cdot 12^{1823} \cdot 12^{1824} \cdot \ldots \cdot 12^{2021}$ el dígito de las unidades corresponde a:

    (a) 2
    (b) 4
    (c) 6
    (d) 8

- Opción correcta: (d)
- Solución:

  $12^{1000} \cdot 12^{1001} \cdot 12^{1002} \cdot 12^{1003} \cdot \ldots \cdot 12^{2050}$
  Usando la ley de potencias
  $= 12^{1000+1001+1002+1003+\cdots+2050}$
  Para efectuar la suma $1000 + 1001 + 1002 + 1003 + \cdots + 2050$ tenemos 1051 terminos, y notamos que $1000 + 2050 = 3050$
  $1001 + 2049 = 3050$
  $1002 + 2048 = 3050$
  Entonces notamos que se pueden hacer 525 parejas de términos que suman 3050.
  Queda sin sumar el término central, en este caso es 1525.
  Teniendo entonces que
  $1000 + 1001 + 1002 + 1003 + \cdots + 2050 = 3050 \cdot 525 + 1525 = 1602775$
  Entonces volviendo al producto solicitado se tiene que $= 12^{1000+1001+1002+1003+\cdots+2050}$

$= 12^{1602775}$

Ahora bien las unidades de $= 12^{1602775}$ se pueden calcular determinando las unidades de $= 2^{1602775}$

Estudiando las primeras potencias de 2 tenemos

2^1	2
2^2	4
2^3	8
2^4	16
2^5	32
2^6	64
2^7	128
2^8	256

Así las potencia de 2 con exponente múltiplo de 4 mas tres unidades, tiene las mismas unidades que 2^3 es decir 8.

Por la regla de divisibilidad del 4 como 1602772 termina en 72 y este numero es divisible por 4, entonces 1602772 es divisible por 4.

$1602775 = 1602772 + 3$ es decir un múltiplo de 4 mas tres unidades.

Entonces $2^{1602775}$ tiene las mismas unidades que 2^3 es decir el dígito de las unidades es 8 .

Analizar II Nivel

30. El resultado de realizar la siguiente operación
$\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2022}\right)\cdot$ corresponde a

  (a) 1
  (b) $\frac{1}{2021}$
  (c) $\frac{1}{2022}$
  (d) $\frac{1}{10110}$

- Opción correcta: c
- Solución:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2022}\right)\cdot=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2021}{2022}=\frac{1}{2022}$$

Analizar II Nivel

31. La probabilidad de obtener corona 10 veces consecutivas al lanzar una moneda al aire 10 veces corresponde a

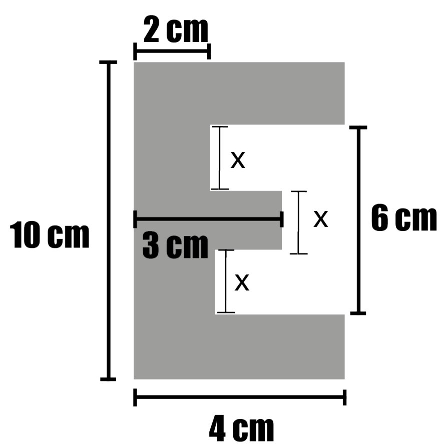
(a) $\frac{1}{2}$
(b) $\frac{1}{20}$
(c) $\frac{1}{100}$
(d) $\frac{1}{1024}$

- Opción correcta: d
- Solución: La probabilidad de obtener corona al lanzar una moneda es $\frac{1}{2}$ por lo cual la probabilidad al lanzar la moneda 10 y poder obtener 10 cornonas está dada por

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2^{10}}=\frac{1}{1024}$$

Analizar quitar

32. Según el gráfico adjunto el valor del área sombreada corresponde a

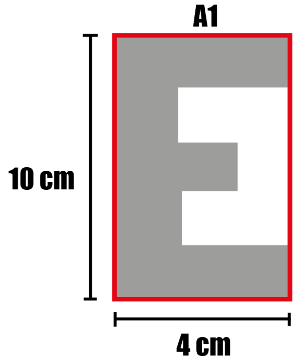


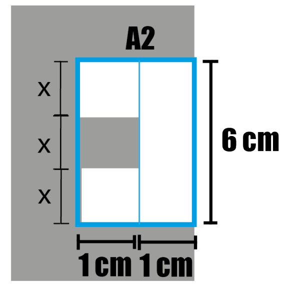
(a) $24cm^2$
(b) $34cm^2$
(c) $30cm^2$
(d) $40cm^2$

- Opción correcta: (c)

Solución:

El área $A1 = 10\cdot 4 = 40cm^2$.
El área $A2$ corresponde a la sección sin sombrear $A2 = 6\cdot 2 - \frac{6\cdot 1}{3} = 12 - 2 = 10$.
Por tanto el Área sombreada $A_s = A1 - A2 = 40 - 10 = 30$.


A1
10 cm
4 cm


A2
x
x
x
6 cm
1 cm 1 cm

Pasar a II o III Nivel

33. Sean α y β números enteros positivos entonces en la ecuación $\beta^\alpha \cdot (2\alpha+1)^\beta \cdot (\alpha+\beta) = 27104$ el valor de $\alpha - \beta$ corresponde a

    (a) 1
    (b) 2
    (c) 3
    (d) 4

- Opción correcta: (c)
- Solución: Se procede a descomponer en factores primos el número 27104 se obtiene $2^5 \cdot 7 \cdot 11^2$. Al comparar la descomposición canónica del número con el lado izquierdo de la ecuación se concluye que $\alpha = 5$ y $\beta = 2$. Por lo tanto, el valor de $\alpha - \beta = 5 - 2 = 3$.

Eliminar o modificar

34. Considere la siguiente suma

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + 26^2$$

El dígito de las unidades de la suma corresponde a:

    (a) 1
    (b) 5
    (c) 6
    (d) 9

- Opción correcta: (a)
- Solución:
  Las potencias 1^2, 11^2, 21^2, 9^2 y 19^2, terminan en 1.
  Las potencias 2^2, 12^2, 22^2, 8^2 y 18^2 terminan en 4.
  Las potencias 3^2, 13^2, 23^2, 7^2 y 17^2 terminan en 9.
  Las potencias 4^2, 14^2, 24^2, 6^2, 16^2 y 26^2 terminan en 6.
  Las potencias 5^2, 15^2, 25^2 terminan en 5.
  Las potencias 10^2, 20^2 terminan en 0.
  Así en la suma $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + 10^2$ se puede calcular el dígito de las unidades como $1+4+9+6+5+6+9+4+1+0 = 45$, es decir tiene dígito de las unidades a 5.
  De la misma manera $11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2 + ... + 20^2$ tiene dígito de las unidades a 5.
  Finalmente las unidades de $21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 + ... + 26^2$ es $1+4+9+6+5+6 = 31$ tiene el dígito de la unidad 1.
  Finalmente las unidades de $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + 26^2$ es $5+5+1 = 11$. Es decir el dígito de las unidades es 1.