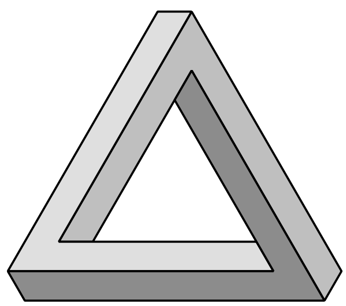
XXXIV Olimpiada Costarricense de Matemáticas

MEP–UCR–ITCR–UNA–UNED–MICITT

Solución

I Eliminatoria



Nivel II

(8° – 9°)

2022

INDICACIONES GENERALES

Estimado estudiante:

La Comisión de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas 2022 le saluda y le da la más cordial bienvenida a la Primera Eliminatoria Nacional de estas justas académicas, deseándole los mayores éxitos.
La prueba consta de un total de 20 preguntas de selección única.

Puede consultar la lista de estudiantes clasificados a partir del **viernes 8 de Julio**, en la siguiente dirección electrónica:

www.olcoma.ac.cr

- Esta eliminatoria tiene un formato virtual por tanto las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en la plataforma de EstudiaU de la UNED. En los casos debidamente justificados y comunicados a la comisión, se hará en la hoja de respuestas que se le ha entregado.
- Debe trabajar en forma individual.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no necesariamente están hechos a escala.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A y B	$\angle ABC \cong \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre los puntos P y R

I Parte: Selección única **Valor 40 puntos, 2 puntos c/u**

1. Dos pulgas están colocadas sobre la recta numérica, la primera está colocada en el número 0 y da saltos de 3 unidades hacia la derecha, la segunda está colocada en el número n y da saltos de 4 unidades hacia la izquierda. Si ambas empiezan a saltar al mismo tiempo y caen al mismo tiempo en el número 2022, el valor de n es

   (a) 4714

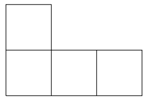
   (b) 4718

   (c) 4722

   (d) 4726

- Opción correcta: (b)
- Solución:
  Como la primera pulga está en 0 y da saltos de 3 unidades, dará 674 saltos para llegar a 2022. Como ambas pulgas llegan al mismo momento a este número, la segunda pulga debe dar también 674 saltos (de 4 unidades cada uno) desde un número mayor. Por lo tanto la segunda pulga debe estar en $4 \cdot 674 + 2022 = 4718$

2. Se tiene un tablero cuadriculado de tamaño n por n, donde cada cuadrito es de tamaño 1×1. Se quiere cubrirlo completamente con piezas de la forma

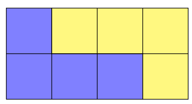


de modo que no haya superposición de las piezas. Entonces un posible tablero que si es posible cubrir es el de tamaño

(a) 5×5
(b) 6×6
(c) 7×7
(d) 8×8

- Opción correcta: (d)
- Solución:

Es fácil verificar que la configuración



permite cubrir un tablero 4×4 y también el 8×8. Por otro lado, como cada pieza tiene 4 cuadritos, debe cumplirse que el tablero completo debe tener una cantidad de cuadritos que sea divisible por 4, lo que descarta las opciones 5×5 y 7×7. Por último, el tablero 6×6 tiene $36 = 4 \times 9$ cuadritos, que es divisible por 4. En este caso, suponga que se colorea las columnas del tablero en dos colores, azul y amarillo. Independientemente de como se coloque la pieza, esta va ocupar tres cuadritos de un color y el otro cuadrito del otro color. Como la cantidad de cuadritos azules es igual que la cantidad de cuadritos amarillos (18 de cada uno), la cantidad de piezas que cubren tres cuadritos azules y uno amarillo debe ser igual que la cantidad de piezas que cubren tres cuadritos amarillos y uno azul. En consecuencia, la cantidad de piezas debe ser par. Pero en este caso la cantidad de cuadritos debe ser disivible por 8. Como 36 no es divisible por 8 este tablero tampoco se puede cubrir.

3. Alexa, María, Paula y Carla son 4 estudiantes de matemática a quienes se les formularon 3 problemas y solo una de ellas logró resolverlos todos. Se sabe que cada una de ellas logró resolver al menos uno de los problemas. Tres de ellas resolvieron el problema 1, dos resolvieron el problema 2 y solamente una de ellas resolvió el problema 3. Además, Alexa y María tienen la misma condición para el problema 2 (ambas lo resolvieron o ambas no lo resolvieron), María y Paula tienen la misma condición para el problema 1, y el problema 1 no fue resuelto por Paula o por Carla.

   La persona que resolvió los 3 problemas es

   (a) Alexa

   (b) María

   (c) Paula

   (d) Carla

- Opción correcta: (c)
- Solución:

Dado que el problema 1 fue resuelto por 3 personas, María y Paula tienen la misma condición para dicho problema, y este problema no fue resuelto por Paula o por Carla, se deduce que Carla no resolvió el problema 1 y María y Paula sí, y en consecuencia Alexa también lo resolvió. Ahora, Alexa y María tienen la misma condición para el problema 2 (ambas lo resolvieron o ambas no lo resolvieron). Si ambas lo resolvieron, quiere decir que Paula y Carla no lo hicieron y esto significa que Carla debió resolver el problema 3, y las demás no, pero esto contradice el hecho que hay una persona que resolvió todos los problemas. Por lo que el problema 2 fue resuelto por Paula y Carla, y como hay una persona que resolvió los 3 problemas, el problema 3 fue resuelto por Paula.

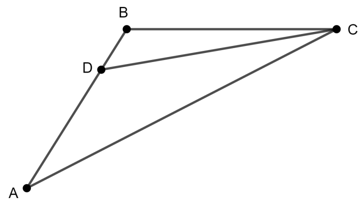
4. En la figura, $BC = 12$ cm, la altura del $\triangle ABC$ trazada desde A mide 7 cm y $\dfrac{DB}{AD} = \dfrac{1}{3}$, entonces el área del $\triangle ADC$ corresponde a

   (a) 31,5 cm^2

   (b) 10,5 cm^2

   (c) 14 cm^2

   (d) 21 cm^2



- Opción correcta: (a)
- Solución: El área del $\triangle ABC$ es $\dfrac{12 \cdot 7}{2} = 42$ cm^2. Como $\dfrac{DB}{AD} = \dfrac{1}{3}$, entonces $\overline{AD}$ mide tres cuartas partes de $\overline{AB}$ y como los triángulos ADC y ABC tienen la misma altura desde el punto C, entonces se concluye que el área de $\triangle ADC$ es tres cuartas partes del área de $\triangle ABC$, por lo que $(ADC) = \dfrac{3}{4} \cdot 42 = 31{,}5$ cm^2.

5. La cantidad de números positivos de tres dígitos que son divisibles por 12 pero que no son divisibles por 5 es

   (a) 55

   (b) 60

   (c) 70

   (d) 75

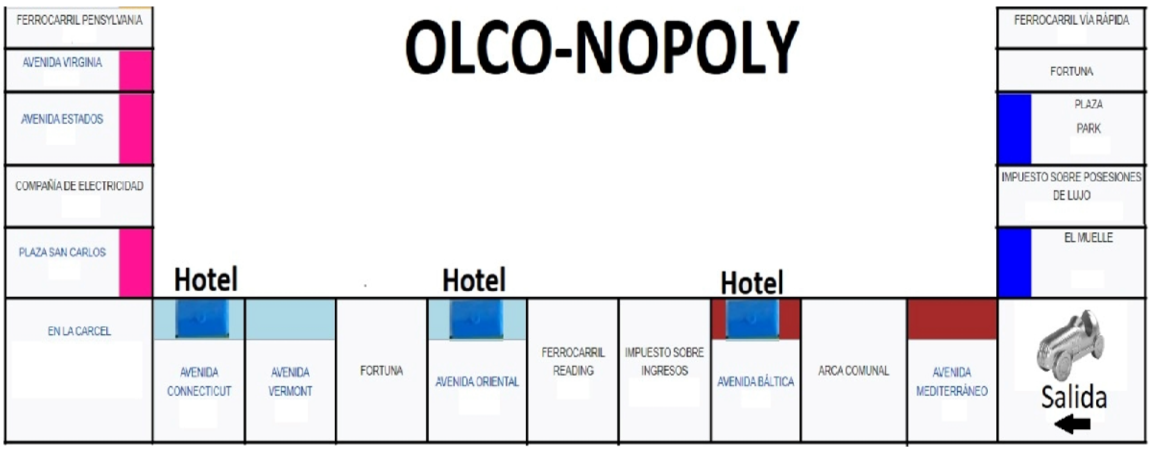
- Opción correcta: (b)

- Solución:
  Los números de tres dígitos divisibles por 12 van desde $108 = 12 \cdot 9$ hasta $996 = 12 \cdot 83$, los cuales son $83 - 9 + 1 = 75$ números.

  De estos se deben restar los que son divisibles por 5, es decir, números que son divisibles por 12 y 5 al mismo tiempo. Como 12 y 5 son coprimos, dichos números deben ser divisibles por 60. Luego, la cantidad de números de tres dígitos divisibles por 60 van desde $120 = 60 \cdot 2$ hasta $960 = 60 \cdot 16$, los cuales son $16 - 2 + 1 = 15$ números.

  Entonces hay $75 - 15 = 60$ números que cumplen lo pedido.

6. Mateo está jugando Monopoly. Su ficha está en la casilla de salida. El tira dos dados, suma la cantidad obtenida en cada dado y avanza tantas casillas como los dados lo indican. Como Mateo tiene poco dinero en el juego, si cae en un hotel pierde el juego inmediatamente. Los hoteles están en las casillas denominadas Avenida Báltica, Avenida Oriental y Avenida Connecticut.



Fuente: adaptado del Anexo: Tableros del Monopoly, por OLCOMA, 2022 https://es.wikipedia.org/wiki/Anexo:Tableros_del_Monopoly

La probabilidad de que Mateo pierda el juego en este turno es

(a) $\frac{1}{4}$

(b) $\frac{6}{21}$

(c) $\frac{11}{36}$

(d) $\frac{1}{2}$

- Opción correcta: (c)
- Solución:

Para que Mateo caiga en el primero hotel debe avanzar tres casillas, para esto los dados deben tener las siguiente combinaciones

Dado 1	Dado 2	Suma
1	2	3
2	1	3

Es decir existen 2 formas en que Mateo puede caer en dicha casilla.

Para que Mateo caiga en el segundo hotel debe avanzar seis casillas, para esto los dados deben tener las siguiente combinaciones

Dado 1	Dado 2	Suma
1	5	6
2	4	6
3	3	6
4	2	6
5	1	6

Es decir existen 5 formas en que Mateo puede caer en dicha casilla.

Para que Mateo caiga en el tercer hotel debe avanzar nueve casillas, para esto los dados deben tener las siguiente combinaciones

Dado 1	Dado 2	Suma
3	6	9
4	5	9
5	4	9
6	3	9

Es decir existen 4 formas en que Mateo puede caer en dicha casilla.
En total existen 11 formas en las que mateo puede perder el juego.
Además, la cantidad de combinaciones posibles al tirar los dados es $6 \cdot 6 = 36$.
Así la probabilidad de que Mateo pierda en el próximo turno es $\dfrac{11}{36}$.

7. Si se quiere escribir el número 2022 como la suma de algunos elementos de la sucesión $6, 18, 54, 162, \ldots$, la cantidad de términos que se deben sumar corresponde a
   (a) 5

   (b) 6

   (c) 7

   (d) 8

- Opción correcta: (a)
- Solución:

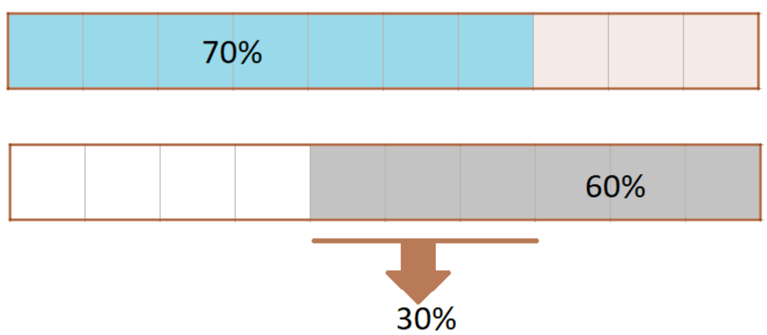
puede notarse que la sucesión tiene la fórmula $a_n = 2 \cdot 3^n$, así $a_1 = 6, a_2 = 18, a_3 = 54, a_4 = 162, a_5 = 486, a_6 = 1458$ y se puede notar que 2022=6+18+54+486+1458

8. El 70 % de los estudiantes de un determinado colegio están en olimpiadas de matemáticas y el 60 % de los estudiantes están en olimpiadas de física. Sabiendo que cada estudiante está participando en al menos una de las dos olimpiadas, el porcentaje de los estudiantes que participan en ambas olimpiadas es del:

   (a) 30 %
   (b) 40 %
   (c) 45 %
   (d) 50 %

- Opción correcta: (a)
- Solución:

Representamos el 70 % de los que están en olimpiada en matemática. También representamos el 60 % de la olimpiada de física. Se puede notar que el 30 % coincide en ambas olimpiadas



9. Carlos tiene dos dados de seis caras. Uno con caras enumeradas del 1 al 6, el otro tiene dos caras con el número 2, una cara con el 5 y tres caras con el 6.
   Si tira los dos dados juntos, la probabilidad de que la suma de los dos números sea igual a 9 corresponde a
   (a) $\frac{1}{3}$
   (b) $\frac{2}{3}$
   (c) $\frac{1}{6}$
   (d) $\frac{1}{9}$

- Opción correcta: (d)
- Solución:
  Para que la suma sea 9, en el dado especial se debe obtener 5 o 6. Así la probabilidad de obtener 5 o 6 es $\frac{4}{6}$. Si se obtiene 5 en el especial, solo hay una posibilidad en el normal para que la suma sea 9, ánalogamente para el 6. Así la probabilidad está dada por $\frac{4}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

10. El resultado de realizar la siguiente operación

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2022}\right)$$

corresponde a

(a) 1

(b) $\frac{1}{2021}$

(c) $\frac{1}{2022}$

(d) $\frac{1}{10110}$

- Opción correcta: (c)
- Solución:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2022}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2021}{2022}=\frac{1}{2022}$$

11. La suma de los dígitos del número $10^{40} - 28$ corresponde a

    (a) 351
    (b) 414
    (c) 369
    (d) 432

- Opción correcta: (a)
- Solución:

  Se tiene que el dígito de las decenas y el de las unidades respectivamente es 7 y 2, y el resto son 38 nueves, por lo que la suma de los dígitos del número es $9 \cdot 38 + 7 + 2 = 351$.

12. En un torneo de boliche jugarán 9 equipos; cada equipo jugará una vez contra cada uno de los otros 8 equipos y no se permiten empates. En cada juego, al ganador se le otorgará 1 punto y al perdedor 0 puntos. Si se eliminan todos los equipos que al final del torneo hayan acumulado 2 puntos o menos, la máxima cantidad de equipos que podrán quedar eliminados corresponde a:

    (a) 3 equipos.
    (b) 4 equipos.
    (c) 5 equipos.
    (d) 6 equipos.

- Opción correcta: (c)
- Solución:

Esto ocurre si, por ejemplo, 4 de los equipos ganan todos sus juegos contra los otros 5 (obteniendo así, al menos 5 puntos cada uno), y entre los 5 restantes cada uno gana 2 juegos (esto es posible si, digamos que son a, b, c, d y e y cada uno gana al que le sigue en las listas a, b, c, d, e, a y a, c, e, b, d, a (que son los 10 juegos posibles entre ellos).

13. Si se lanzan 10 monedas al aire, la probabilidad de obtener 10 coronas corresponde a

    (a) $\dfrac{1}{2}$

    (b) $\dfrac{1}{20}$

    (c) $\dfrac{1}{100}$

    (d) $\dfrac{1}{1024}$

- Opción correcta: (d)
- Solución:
  Si lanzamos una moneda la probabilidad de obtener una corona es $\dfrac{1}{2}$ ya que tenemos una de dos posibilidades (E, C), mientras que si lanzamos dos monedas tenemos: CC, CE, EC, EE y la probabilidad de obtener dos coronas es $\dfrac{1}{4} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$, del mismo, al lanzar tres monedas tenemos: $CCC, CCE, CEC, ECC, CEE, ECE, EEC, EEE$ es decir la probabilidad de obtener tres coronas es $\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$. Por lo tanto al lanzar 10 monedas la probabilidad de obtener 10 coronas es $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10} = \dfrac{1}{1024}$

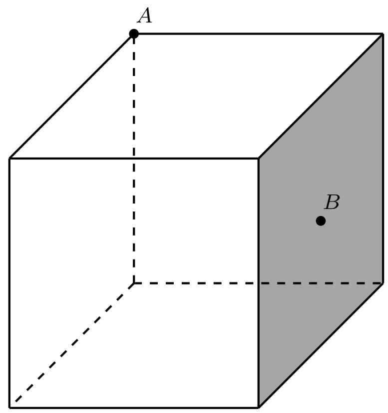
14. En la figura adjunta se muestra un cubo sólido de arista 2, B es el centro de la cara sombreada. Si una hormiga camina desde A hasta B, la menor distancia que recorre es

(a) $\sqrt{10}$

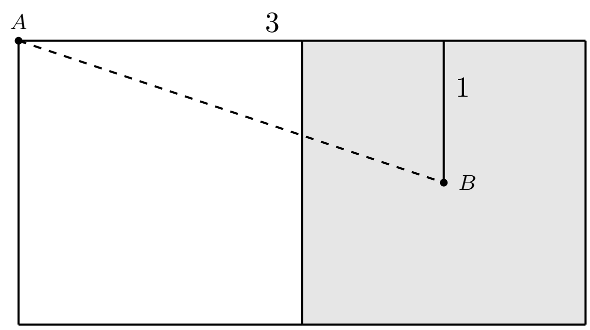
(b) $2+\sqrt{2}$

(c) $1+\sqrt{3}$

(d) $1+\sqrt{5}$



- Opción correcta: (a)
- Solución:
Si se *extienden* las caras del cubo se observa que la distancia entre A y B corresponde a la hipotenusa de un triángulo de catetos 3 y 1, por lo que su distancia es $\sqrt{10}$.



15. Si $\left(1+\dfrac{1}{2022}\right)^{-2022}=\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{2022}$ entonces el valor de x corresponde a

   (a) 2021

   (b) 2022

   (c) 2023

   (d) 2024

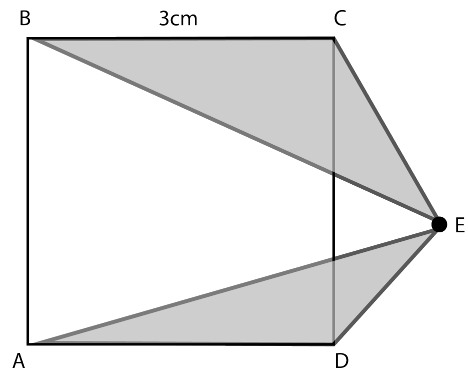
- Opción correcta: (c)
- Solución:

  Note que

$$\left(1+\frac{1}{2022}\right)^{-2022}=\left(1-\frac{1}{x}\right)^{2022}$$
$$\left(\frac{2023}{2022}\right)^{-2022}=\left(\frac{x-1}{x}\right)^{2022}$$
$$\left(\frac{2022}{2023}\right)^{2022}=\left(\frac{x-1}{x}\right)^{2022}$$

$\dfrac{2022}{2023}=\dfrac{x-1}{x}$ con lo cual $x=2023$

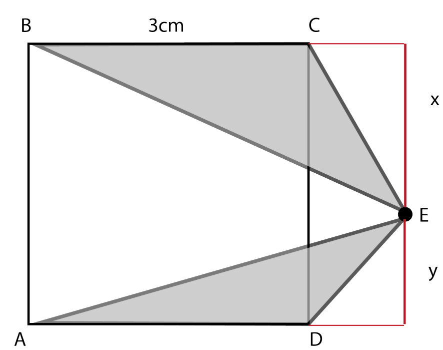
16. En la figura el $\square ABCD$ es un cuadrado de 3 cm de lado. La suma de las áreas de $\triangle ADE$ y $\triangle BCE$, en cm^2, es



(a) $7,5$
(b) 6
(c) $4,5$
(d) 2

- Opción correcta: (c)
- Solución:

Trazando las alturas de los triángulos como se muestra en la figura a continuación



Note que $x + y = 3$

El área sombreada $A_s = \dfrac{3x}{2} + \dfrac{3y}{2} = \dfrac{(3x) + (3y)}{2} = \dfrac{3(x+y)}{2} = \dfrac{3 \cdot 3}{2} = \dfrac{3^2}{2} = 4,5$

17. Natalia tiene 5 letras distintas y forma con ellas palabras de manera que cumplen las siguientes reglas:

    - Cada palabras tiene una extensión entre 1 y 5 letras.
    - Cada palabras debe ser un palíndromo, es decir, tiene que leerse igual de derecha a izquierda como de izquierda a derecha. Por ejemplo la palabra Natan es un palíndromo, pues se lee igual de izquierda a derecha como de derecha a izquierda.
    - Una letra no puede ser usada mas de dos veces en una misma combinación.

    La cantidad máxima de palabras que Natalia puede formar con estas reglas es

    (a) 25

    (b) 60

    (c) 110

    (d) 325

- Opción correcta: (c)
- Solución:

Se contarán la cantidad de palabras posibles según la cantidad de letras.
Para una sola letra se tienen 5 posibilidades, pues tiene 5 letras distintas.
Para una combinación de dos letras, dichas letras deben ser la misma para que cumpla la segunda condición; entonces se tienen también 5 posibilidades.
Para una combinación de tres letras, la primera y tercera letra deben ser iguales y la letra central debe ser distinta. Tiene 5 posibilidades para escoger la primera letra y 4 posibilidades de escoger la letra central, por lo que tiene $5 \cdot 4 = 20$ posibilidades.
Igualmente para una combinación de cuatro letras se tiene $5 \cdot 4 = 20$ posibilidades, porque la primera y la cuarta letra deben ser iguales, así como la segunda y tercera letra (para que se cumpla la segunda condición).
Finalmente, cada palabra de cinco letras, la primera y quinta letra deben ser iguales, así como la segunda y cuarta. Entonces tiene 5 posibilidades para escoger la primera letra, 4 para la segunda y 3 para la letra central, es decir, $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ posibilidades.

En total puede formar $5 + 5 + 20 + 20 + 60 = 110$ palabras.

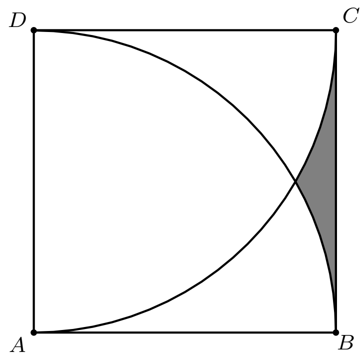
18. En la figura adjunta $\square ABCD$ es un cuadrado de 2 unidades de lado. Si los arcos AC y BD son cuartos de circunferencias, el área de la región sombreada es

(a) $4 - \frac{\pi}{2} - \sqrt{3}$

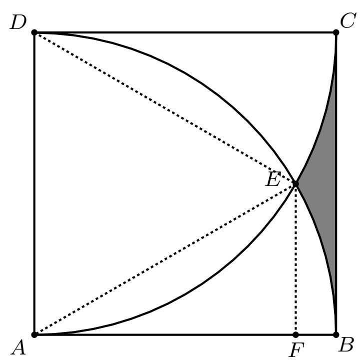
(b) $4 - \frac{3\pi}{2} - \sqrt{3}$

(c) $4 - \frac{2\pi}{3} - 2\sqrt{3}$

(d) $4 - \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}$



- Opción correcta: (d)
- Solución:
  Llamemos E al punto de intersección de los arcos de circunferencia, F en $\overline{AB}$ como se muestra en la figura. Para determinar el área sombreada basta restar al área del cuadrado el área de la región en blanco.



En $\triangle AEF$ se tiene $AE = 2$ y $EF = 1$ de donde $AF = \sqrt{3}$, por lo que $\triangle AEF$ es semiequilátero y $m\angle EAF = 30°$. Entonces, los sectores determinados por los arcos BE y EC, juntos, representan la sexta parte de la circunferencia de radio 2; por lo que su área es $\frac{1}{6}\pi r^2 = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 2^2 = \frac{2\pi}{3}$

Por otra parte, $(AED) = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

El área sobreada es $4 - \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}$

19. Considere los números impares colocados en filas de la siguiente manera

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 3 & & 5 & & & & \\
 & & & 7 & & 9 & & 11 & & & \\
 & & 13 & & 15 & & 17 & & 19 & & \\
 & 21 & & 23 & & 25 & & 27 & & 29 & \\
31 & & 33 & & 35 & & 37 & & 39 & & 41 \\
\iddots & \cdots & & & & \vdots & & & \cdots & & \ddots
\end{array}$$

Si el primer número de la fila k difiere en 200 del primer número de la fila siguiente, entonces la suma de los números colocados en la fila k corresponde a

(a) 10^3
(b) 10^6
(c) 10^8
(d) 10^{10}

- Opción correcta: (b)
- Solución:
Se observa que el primer número de la fila n difiere en $2n$ del primer número de la fila siguiente, por ejemplo el primer número de la fila 5, que es un 21 difiere en $2 \cdot 5 = 10$ del primer número de la fila 6. Como el primer número de la fila k difiere en 200 del primer número de la fila siguiente, entonces $k = 100$. Por otra parte, se observa que la primera fila suma $1 = 1^3$, la segunda suma $8 = 2^3$, la tercera suma $27 = 3^3$, es decir la fila n suma n^3, por lo tanto la fila 100 suma $100^3 = 10^6$.

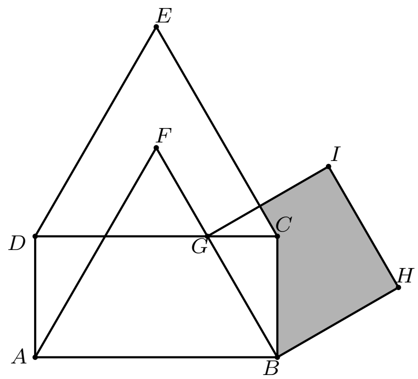
20. En la figura adjunta $\square ABCD$ es un rectángulo de 2 unidades de largo y 1 de ancho. Si $\triangle ABF$ y $\triangle DCE$ son equiláteros y $\square BHIG$ es un cuadrado, el área de la región sombreada es

(a) $\dfrac{32-5\sqrt{3}}{24}$

(b) $\dfrac{32-\sqrt{3}}{32}$

(c) $\dfrac{32-\sqrt{3}}{24}$

(d) $\dfrac{32-5\sqrt{3}}{32}$



- Opción correcta: (a)
- Solución:

El $\triangle BCG$ es un triángulo especial $30° - 60° - 90°$, como $BC = 1$ se obtiene que $BG = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ y $CG = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Entonces $(BGIH) = \left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{3}$ y $(BCG) = \dfrac{1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$

Si llamamos J al punto de intersección de $\overline{CE}$ con $\overline{GI}$, se tiene que $\triangle CGJ$ es un triángulo especial $30° - 60° - 90°$, con $CG = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, de donde se obtiene que $CJ = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$ y $GJ = \dfrac{1}{2}$, por lo que $(CGJ) = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{1}{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{24}$.

Finalmente el área sombreada se obtiene por

$$(BGIH) - (BCG) - (CGJ) = \frac{4}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{24} = \frac{32-5\sqrt{3}}{24}$$