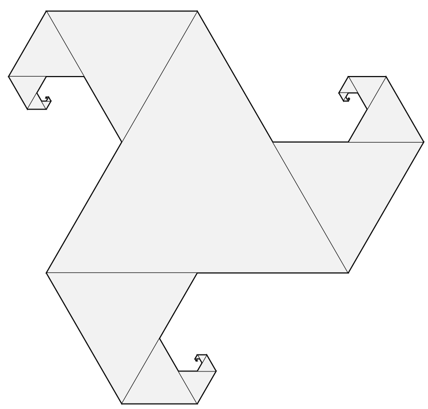
XXXIV OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICAS

MEP - UCR - TEC - UNA - UNED - MICITT

SOLUCIÓN
I ELIMINATORIA



Nivel III

$(10^{\circ} - 11^{\circ} - 12^{\circ})$

2022

Estimado estudiante:

La Comisión de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas 2022 le saluda y le da la más cordial bienvenida a la Primera Eliminatoria Nacional de estas justas académicas, deseándole los mayores éxitos.
La prueba consta de un total de 20 preguntas de selección única.

Puede consultar la lista de estudiantes clasificados a partir del **viernes 8 de Julio**, en la siguiente dirección electrónica:

www.olcoma.ac.cr

INDICACIONES GENERALES

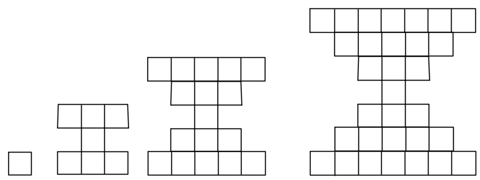
- Esta eliminatoria tiene un formato virtual por tanto las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en la plataforma de EstudiaU de la UNED. En los casos debidamente justificados y comunicados a la comisión, se hará en la hoja de respuestas que se le ha entregado.
- Debe trabajar en forma individual.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no necesariamente están hechos a escala.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A y B	$\angle ABC \cong \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre los puntos P y R

I Parte: Selección única **Valor 40 puntos, 2 puntos c/u**

1. Considere la siguiente sucesión de figuras. ¿Cuántos cuadritos tiene la figura cuya base está formada por 35 cuadritos?
   (a) 323
   (b) 645
   (c) 647
   (d) 649



- Opción correcta: (c)
- Solución:

Vamos a partir la figura en dos partes: la parte de abajo que incluye desde la base hasta el cuadrito del centro (el que está solo) y la parte de arriba que consiste en el resto (sin contar el centro). Puede notarse que la cantidad de cuadritos en la parte de abajo es la suma

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 35,$$

es decir, la suma de los enteros impares positivos hasta 35. En la parte de arriba tenemos la misma cantidad de cuadritos que abajo menos uno (porque no consideramos el cuadrito del centro).

Recordamos que las siguientes igualdades para las sumas de los primeros impares:

$$1 = 1, \quad 1 + 3 = 4 = 2^2, \quad 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2, \quad 1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2, \ldots$$

Es decir, la suma de los primeros n impares positivos es n^2. El número 35 es el impar número 18, por lo que la cantidad de cuadritos en la parte de abajo (contando el centro) es $18^2 = 324$ y en la parte de arriba (sin contar el centro) tenemos $18^2 - 1 = 323$. Por lo tanto, la figura cuya base tiene 35 cuadritos, tendrá en total 647 cuadritos.

2. En la figura dada, los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle JKL$ son equiláteros y los cuadriláteros $\square DELK$, $\square FGJL$ y $\square HIKJ$ son cuadrados.

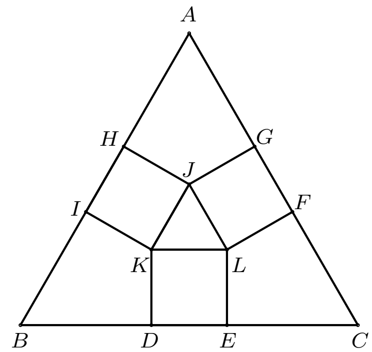
   Si $DE = 1$, entonces la razón entre las áreas $\frac{(BDKI)}{(KLJ)}$ corresponde a:

   (a) 2

   (b) 4

   (c) 6

   (d) 8



- Opción correcta: (b)

- Solución:
  Como $DE = 1$ y $\square DEKL$ es un cuadrado, entonces $KL = 1$. Por lo tanto los lados del triángulo equilátero $\triangle JKL$ miden 1 y $(KLJ) = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

  Además, $KI \perp AB$, $KD \perp BC$ y $KI = KJ = KL = KD$, por lo que K está en la bisectriz del ángulo ABC. Esto implica que los triángulos $\triangle BKD$ y $\triangle BKI$ son $30° - 60°$, por lo que $BD = BI = \sqrt{3}$ y así $(BDKI) = (BDK) + (BIK) = \sqrt{3}/2 + \sqrt{3}/2 = \sqrt{3}$.

  Con esto concluimos que $\frac{(BDKI)}{(JKL)} = 4$.

3. La cantidad de números de cuatro dígitos que tienen exactamente una vez a los dígitos 2, 5 y 7, y que además son divisibles por 18, es igual a:
   (a) 9
   (b) 12
   (c) 18
   (d) 24

- Opción correcta: (b)
- Solución:

Un número es divisible por 18 si y sólo si es divisible por 2 y por 9. Para que el número sea divisible por 2, entonces el último dígito debe ser par; y para que el número sea divisible por 9, entonces la suma de los dígitos debe ser divisible por 9.

Sea a el dígito que falta para formar el número buscado. De esta forma, la suma de los dígitos es $2+5+7+a = 14+a$. Para a entre 0 y 9, los valores de $14+a$ están entre 14 y 23. Por lo tanto, la única manera de que el número sea divisible entre 9 es que $14+a = 18$, es decir, $a = 4$.

Con esto tenemos que los dígitos son $2, 4, 5, 7$. El último dígito puede ser 2 o 4; una vez escogido este, los primeros tres dígitos se pueden escoger de cualquiera de las seis formas posibles. Por lo tanto, hay $2 \cdot 6 = 12$ números posibles que cumplen la propiedad del problema.

4. La cantidad de números naturales de dos dígitos ab con $a \neq 0$ tales que $a^2 + b^2$ es divisor de 22 corresponde a

   a) uno
   b) dos
   c) tres
   d) cuatro

- Opción correcta: (b)
- Solución:
  Se observa que $10 \leq ab \leq 99$ con $a \neq 0$. Los cuadrados perfectos de los dígitos son los siguientes: $0^2 = 0,\ 1^2 = 1,\ 2^2 = 4,\ 3^2 = 9,\ 4^2 = 16, \ldots,\ 9^2 = 81$.

  Notamos que $22 = 2 \cdot 11$, por lo que los divisores de 22 son: $1, 2, 11$ y 22. Como $a^2 + b^2$ es divisor de 22, entonces $a^2 + b^2$ tienen que ser $1, 2, 11$ o 22. Analizamos ahora las diferentes posibilidades.

  Si $a^2 + b^2 = 1$, entonces la condición $a \neq 0$ implica que la única solución es cuando $a = 1$ y $b = 0$. El número que se obtiene es 10.

  Si $a^2 + b^2 = 2$, entonces la única solución es cuando $a = 1$ y $b = 1$. El número que se obtiene es 11.

  Se observa que a partir de los números $\{0, 1, 4, 9\}$ no es posible obtener el número 11 como suma de dos de ellos. También se observa que a partir de los números $\{0, 1, 4, 9, 16\}$ no es posible obtener el número 22 como suma de dos de ellos.

  Por lo tanto, solamente hay dos números naturales de dos dígitos que cumplen la condición del problema que son: 10 y 11.

5. En la expansión decimal de $\frac{8}{3} - \frac{5}{7}$, el dígito que está en la posición 2022 después de la coma es

   (a) 0

   (b) 3

   (c) 8

   (d) 9

- Opción correcta: (a)
- Solución:
  Vemos que $\frac{8}{3} - \frac{5}{7} = \frac{41}{21} = 1,\mathbf{952380}\,952380...$ tiene expansión decimal periodica, con periodo de seis dígitos 952380. Como se pide el dígito en posición 2022 y $2022 = 6 \cdot 337$, el periodo se repetirá exactamente 337 veces, por lo que el dígito pedido es 0.

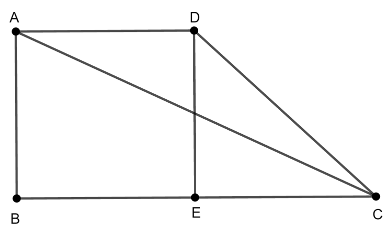
6. En la figura que se muestra, el cuadrilátero $\square ABED$ es un rectángulo y $B-E-C$. Si $AD = 13$, $CD = 15$ y $EC = 7$, entonces la altura del triángulo $\triangle ADC$ sobre el lado $\overline{AC}$ corresponde a

   (a) $4\sqrt{11}$

   (b) $\dfrac{13}{24}\sqrt{11}$

   (c) $\dfrac{13}{12}\sqrt{11}$

   (d) $\dfrac{13}{6}\sqrt{11}$



- Opción correcta: (d)
- Solución:
  Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo $\triangle DEC$ se obtiene que

$$DE^2 = 15^2 - 7^2 = 225 - 49 = 176 = 16 \cdot 11 \Longrightarrow DE = 4\sqrt{11}.$$

Al aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo $\triangle ABC$ se obtiene que

$$AC^2 = (4\sqrt{11})^2 + 20^2 = 176 + 400 = 576 = 24^2 \Longrightarrow AC = 24.$$

En el triángulo $\triangle ACD$ observamos que la altura del vértice C sobre el lado $\overline{AD}$ es igual a $AD = BE = 13$. Por lo tanto, el área del triángulo $\triangle ADC$ es:

$$(ADC) = \frac{AD \cdot DE}{2} = \frac{13 \cdot 4\sqrt{11}}{2} = 26\sqrt{11}.$$

Usando también que el área del triángulo es $(AC \cdot h)/2$, donde h es la altura sobre el lado $\overline{AC}$, podemos concluir que

$$h = \frac{2 \cdot 26\sqrt{11}}{24} = \frac{13}{6}\sqrt{11}.$$

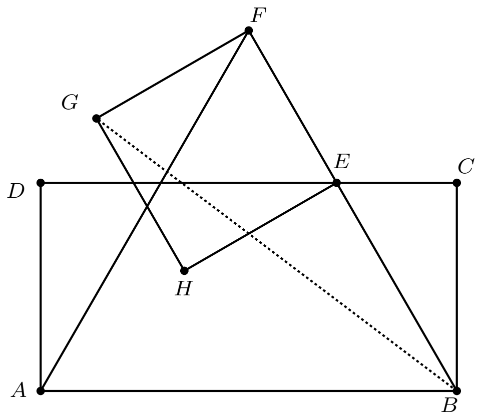
7. En la figura adjunta $\square ABCD$ es un rectángulo de 2 unidades de largo y 1 de ancho. Si $\triangle ABF$ es equilátero y $\square EFGH$ es un cuadrado, entonces el valor de BG^2 es

(a) $\dfrac{28-8\sqrt{3}}{3}$

(b) $\dfrac{25-4\sqrt{3}}{3}$

(c) $\dfrac{26-4\sqrt{3}}{3}$

(d) $\dfrac{27-8\sqrt{3}}{3}$



- Opción correcta: (a)
- Solución:

El $\triangle BCE$ es un triángulo especial $30° - 60° - 90°$, como $BC = 1$ se obtiene que $BE = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. Como $BF = 2$, entonces $EF = GF = 2 - \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. En $\triangle BFG$ se tiene

$$\begin{aligned} BG^2 &= GF^2 + BF^2 \\ &= 2^2 + \left(2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 \\ &= 4 + 4 - \frac{8\sqrt{3}}{3} + \frac{4}{3} \\ &= \frac{28-8\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

8. Considere el número 30^2 . El producto de todos los divisores positivos de 30^2 es:
   (a) 30^{13}

   (b) 30^{14}

   (c) 30^{26}

   (d) 30^{27}

- Opción correcta: (d)
- Solución:
  Como $30^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$, por el teorema de la cantidad de divisores primos se tiene que 30^2 tiene $(2+1)(2+1)(2+1) = 27$, es decir, 27 divisores positivos tiene 30^2.
  Además notamos que con estos divisores se pueden formar parejas que su producto es 30^2, por ejemplo 2^2 si hacemos la división $\dfrac{30^2}{2^2} = 3^2 \cdot 5^2$, tenemos que los divisores 2^2 y $3^2 \cdot 5^2$ tiene como producto 30^2.
  Para 30 no se le puede asignar otro divisor distinto, pues $\dfrac{30^2}{30} = 30$.

  Entonces de los 26 divisores podemos efectuar el producto de las 13 parejas que da 30^2
  Entonces efectuamos el producto solicitado como $(30^2)^{13} \cdot 30 = 30^{27}$

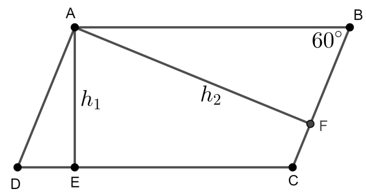
9. En la figura que se muestra, el cuadrilátero $\square ABCD$ es un paralelogramo con $m\angle ABC = 60°$, cuyo perímetro es 24 y cuya área es $16\sqrt{3}$. Si h_1 y h_2 son las alturas desde A sobre $\overline{CD}$ y $\overline{BC}$, respectivamente, entonces $\dfrac{h_1}{h_2} + \dfrac{h_2}{h_1}$ corresponde a

   (a) $\dfrac{9}{2}$

   (b) $\dfrac{3}{2}$

   (c) $\dfrac{5}{2}$

   (d) $\dfrac{7}{2}$



- Opción correcta: (c)
- Solución:
  Sea $x = AD$ y $y = AB$. Aplicando trigonometría, se tiene que:

$$\sin(60°) = \frac{h_1}{x} \Longrightarrow x = \frac{2h_1}{\sqrt{3}},$$

$$\sin(60°) = \frac{h_2}{y} \Longrightarrow y = \frac{2h_2}{\sqrt{3}}.$$

Sumando las expresiones anterior se tiene que

$$x + y = \frac{2h_1}{\sqrt{3}} + \frac{2h_2}{\sqrt{3}} \Longrightarrow 12 = \frac{2(h_1 + h_2)}{\sqrt{3}} \Longrightarrow h_1 + h_2 = 6\sqrt{3}.$$

Luego como $(ABCD) = 16\sqrt{3}$, entonces $y \cdot h_1 = 16\sqrt{3}$ y como $y = \dfrac{2h_2}{\sqrt{3}}$ se tiene que $h_1 \cdot h_2 = 24$.

Dado que $h_1 + h_2 = 6\sqrt{3}$, entonces $h_1^2 + 2h_2h_2 + h_2^2 = 108$ y así se obtiene que:

$$\frac{h_1^2 + 2h_1h_2 + h_2^2}{h_1h_2} = \frac{108}{24} = \frac{9}{2}.$$

Finalmente, observamos que

$$\frac{h_1}{h_2} + \frac{h_2}{h_1} = \frac{h_1^2 + h_2^2}{h_1h_2} = \frac{h_1^2 + 2h_1h_2 + h_2^2}{h_1h_2} - 2 = \frac{9}{2} - 2 = \frac{5}{2}.$$

10. Hay tres cajas del mismo tamaño, de colores blanca, negra y roja respectivamente. La caja blanca tiene 100 bolas negras, la caja negra 100 bolas rojas y la caja roja 100 bolas blancas. Las bolas son idénticas salvo por el color. Se toman 22 bolas de la caja blanca y se depositan en la negra, luego, se mezclan bien, y se toman 22 bolas de la caja negra para ponerlas en la roja, finalmente se pasan 22 bolas de la caja roja a la blanca.

    Según la información anterior, cuatros estudiantes A, B, C y D afirman lo siguiente

    I) El estudiante A dice que en total hay más bolas negras en las cajas negra y roja que bolas blancas y rojas en la caja blanca.

    II) El estudiante B dice que en total hay menos bolas rojas en las cajas roja y blanca que bolas negras y blancas en la caja negra.

    III) El estudiante C dice que en total hay la misma cantidad de bolas blancas en las cajas blanca y negra que bolas rojas y negras en la caja roja.

    IV) El estudiante D dice que no hay certeza en que alguno de sus compañeros tengan razón.

    ¿ Cuál de los cuatro estudiantes tiene razón?

    (a) A.

    (b) B.

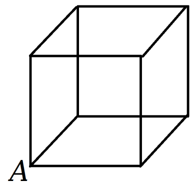
    (c) C.

    (d) D.

- Opción correcta: (c)

- Solución:
  La caja blanca tiene inicialmente 100 bolas negras, después de extraer y depositar las bolas, sea x la cantidad de bolas no negras que están en la caja blanca (puede ser que sea cero), entonces quiere decir que son x las bolas negras que están fuera de la caja blanca (fueron sustituidas por bolas blancas o rojas), por lo tanto están en las otras cajas (negra y roja), eso significa que C tiene razón, de forma análoga se observa que lo que A y B no es correcto ya que es la misma cantidad.

11. Considere un cubo como el de la figura:



Una hormiga pasea sobre los vértices del cubo caminando a través de sus aristas. Ella se encuentra inicialmente en el vértice A. Cada vez que suena un timbre, la hormiga se desplaza a alguno de los tres vértices vecinos del vértice en que se encuentra. Después de que el timbre ha sonado cuatro veces la hormiga ha recorrido uno de $3^4 = 81$ posibles caminos. La probabilidad de que, al finalizar este camino, la hormiga se encuentre en el vértice A, es igual a

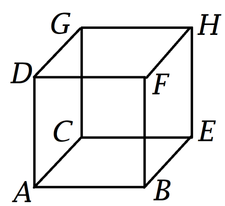
(a) $\dfrac{10}{81}$

(b) $\dfrac{20}{81}$

(c) $\dfrac{7}{27}$

(d) $\dfrac{2}{9}$

- Opción correcta: (c)
- Solución:
Sean $A, B, C, \ldots, H$, los vértices del cubo como en la figura.



Para determinar la probabilidad de que la hormiga termine en A, vamos a contar la cantidad total de caminos que terminan en A y dividir por 81. Para hacer esto, vamos a hacer el conteo de los caminos que terminan en los diferentes vértices según la longitud del camino. Para obtener la cantidad de caminos de longitud n (es decir, después de que el timbre ha sonado n veces) que llegan a determinado vértice hay que sumar la cantidad de caminos de longitud $(n-1)$ que llegan a sus vecinos. Podemos entonces llenar la siguiente tabla de forma recursiva:

longitud	A	B	C	D	E	F	G	H
0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	0	0	0
2	3	0	0	0	2	2	2	0
3	0	7	7	7	0	0	0	6
4	21	0	0	0	20	20	20	0

Por lo tanto, la probabilidad de que, al haber sonado el timbre cuatro veces, la hormiga se encuentre de nuevo en el vértice A es igual a $\dfrac{21}{81} = \dfrac{7}{27}$.

12. Beto trabaja en una frutería donde venden bananos, peras y aguacates. Cada banano pesa 150 gramos y cuesta 80 colones, cada pera pesa 250 gramos y cuesta 600 colones, y cada aguacate pesa 375 gramos y cuesta 1000 colones. Carlos selecciona algunas frutas y las pone en la balanza. Sin ver las frutas que Carlos lleva, Beto observa que el peso total es 2,25 kg (es decir, 2250 g). Con total certeza, Beto puede decir que Carlos va a pagar

    (a) al menos 2000 colones

    (b) más de 800 colones, pero menos de 4000

    (c) al menos 1000 colones, pero no más de 5500

    (d) no más de 6000 colones

- Opción correcta: (d)
- Solución:
  Sean b, p y a el número de bananos, peras y aguacates que Carlos lleva. Tenemos entonces la relación
  $$150b + 250p + 375a = 2250.$$
  El máximo divisor común de 150, 250, 375 y 2250 es 25, por lo que podemos dividir la ecuación anterior por 25 y obtener
  $$6b + 10p + 15a = 90.$$
  Esta ecuación tiene múltiples soluciones; algunas sencillas de encontrar son $(b, p, a) = (15, 0, 0)$, $(b, p, a) = (0, 9, 0)$, $(b, p, a) = (0, 0, 6)$. Al considerar el caso $(b, p, a) = (15, 0, 0)$, el precio a pagar es 1200 colones, con lo que descartamos la opción (a). Al considerar la opción $(b, p, a) = (0, 9, 0)$, el precio a pagar es 5400, con lo que descartamos la opción (b). Al considerar la opción $(b, p, a) = (0, 0, 6)$, el precio a pagar es 6000, con lo que descartamos la opción (c). Por lo tanto, la única opción que puede ser correcta sería la opción (d).

  Para ver que en efecto esta opción es correcta, observamos que si (b, p, a) es una solución, entonces el precio a pagar es
  $$80b + 600p + 1000a \leq \frac{1000}{15}(6b + 10p + 15a) = \frac{1000}{15} \cdot 90 = 6000,$$
  como queríamos.

13. Decimos que un número es *wajiro* si cumple las siguientes dos condiciones: el número es divisible por 22 y al invertir por completo el orden de sus cifras (la primera con la última, la segunda con la antepenúltima y así sucesivamente) se obtiene el mismo número. Por ejemplo, 616 y 2002 son números wajiros, pero 1232 y 1001 no lo son. Entonces, la cantidad de números wajiros de 2022 cifras (la primera debe ser distinta de 0) es igual a

    (a) $2 \cdot 10^{1010}$

    (b) $3 \cdot 10^{1010}$

    (c) $4 \cdot 10^{1010}$

    (d) $5 \cdot 10^{1010}$

- Opción correcta: (c)
- Solución:
  Primero observamos que un número es divisible por 22 si y sólo si es divisible por 2 y 11 simultáneamente. En particular, el último dígito tiene que ser par. Sin embargo, la condición de que el número sea igual al derecho y al revés implica que el último dígito (por ser igual al primero) no puede ser cero. Por lo tanto, un número wajiro es divisible por 2 si y sólo si el primera (o última) cifra es 2, 4, 6 u 8.

  La regla de divisibilidad del 11 dice que la suma de los dígitos en las posiciones pares menos la suma de los dígitos en las posiciones impares debe ser divisible por 11. En el caso de un número que sea igual al derecho y al revés y tenga una cantidad par de cifras, esta diferencia siempre es igual a 0 (pues los dígitos correspondientes se cancelan). Por lo tanto, todo número wajiro de 2022 cifras es divisible por 11.

  Lo anterior dice que lo único que necesitamos para que un número de 2022 cifras sea wajiro es que su primera cifra sea $2, 4, 6$ u 8. Las cifras en las posiciones $2, 3, \ldots, 1011$ se pueden escoger libremente (es decir, cualquiera de las 10 posibilidades), y por ser wajiro, las cifras $1012, 1013, \ldots, 2022$ quedan determinadas por la escogencia anterior. Por lo tanto, la cantidad de números wajiros de 2022 cifras es $4 \cdot 10^{1010}$.

14. Considere la ecuación

$$x^{2022} + x^{2021} + \cdots + x^2 + x = 0.$$

La cantidad de soluciones enteras de la ecuación anterior es

(a) cero
(b) uno
(c) dos
(d) tres

- Opción correcta: (c)
- Solución:

Podemos escribir la ecuación como

$$x(x^{2021} + \cdots + x + 1) = 0.$$

El primer factor da la solución $x = 0$. El segundo factor nos da la ecuación

$$x^{2021} + \cdots + x^2 + x + 1 = 0.$$

Al restar 1 y factorizar x a la izquierda se obtiene que

$$x(x^{2020} + \cdots + x + 1) = -1.$$

Esto implica que x divide -1. En consecuencia, se debe cumplir que $x = 1$ o $x = -1$. Al comprobar directamente se observa que la única solución a esta ecuacón es $x = -1$. Por lo tanto, la cantidad de soluciones enteras de esta ecuación es igual a dos.

15. Considere el número de diez dígitos $n = 9999999995$, el cual está formado por nueve dígitos 9 y un dígito 5. La suma de los dígitos del número n^2 es

    (a) 86

    (b) 87

    (c) 88

    (d) 7396

- Opción correcta: (c)
- Solución:
  Observe que

$$\begin{array}{lllll} 95 & = & 100-5 & = & 10^2-5 \\ 995 & = & 1000-5 & = & 10^3-5 \\ 9995 & = & 10000-5 & = & 10^4-5 \\ & \vdots & & & \\ n & = & 10^{10}-5 & & \end{array}$$

Entonces

$$\begin{aligned} n^2 &= (10^{10}-5)^2 \\ &= 10^{20} - 2\cdot 5\cdot 10^{10} + 5^2 \\ &= 10^{20} - 10^{11} + 25 \\ &= 10^{11}(10^9-1)+25 \\ &= 99\ldots 900\ldots 025 \end{aligned}$$

El cual está formado por 9 dígitos 9, 9 dígitos 0, un 2 y un 5. Entonces la suma de sus dígitos es $9\cdot 9 + 2 + 5 = 88$.

16. La cantidad de valores enteros para x de forma que la expresión $\dfrac{x^3+3x^2-4x+4}{x-2}$ sea un número entero es igual a
    (a) cero
    (b) cinco
    (c) nueve
    (d) diez

- Opción correcta: (d)
- Solución:
  Al realizar la división de polinomios o división sintética se obtiene que

$$\frac{x^3+3x^2-4x+4}{x-2}=x^2+5x+6+\frac{16}{x-2}$$

Para que la expresión dada sea una número entero se requiere que $x-2$ divida a 16. Los divisores de 16 son $\{\pm1,\pm2,\pm4,\pm8,\pm16\}$. Por cual existen 10 valores que satisfacen lo indicado.

17. Considere el polinomio $p(x) = 5x - 3$. Sean a y b números reales tales que $p(a) = b$ y $p(b) = a$. Determine el valor de $a + b$.
    (a) $\dfrac{-3}{2}$
    (b) -1
    (c) 1
    (d) $\dfrac{3}{2}$

- Opción correcta: (d)
- Solución:
  Al evaluar $p(a)$ y $p(b)$ se obtiene el sistema

$$\begin{cases} 5a - 3 = b \\ 5b - 3 = a \end{cases}$$

Si a la ecuación 1 se le resta la ecuación 2 se obtiene $5a - 3 - 5b + 3 = b - a$. Luego se tiene que:

$$5(a - b) + (a - b) = 0$$

$$6(a - b) = 0$$

Por lo tanto, $a = b$ y así tenemos la ecuación $5a - 3 = a$. Esto da que $a = 3/4$ y por lo tanto $a + b = 3/4 + 3/4 = 3/2$.

18. En un triángulo $\triangle ABC$ se tiene que $AB = a$, $BC = 3a$ y $m\angle ABC = 60°$. La altura del triángulo ABC sobre el lado $\overline{AC}$ es igual a

    (a) $\dfrac{3a\sqrt{21}}{7}$

    (b) $\dfrac{3a\sqrt{39}}{13}$

    (c) $\dfrac{3a\sqrt{21}}{14}$

    (d) $\dfrac{3a\sqrt{39}}{26}$

- Opción correcta: (c)
- Solución:

  Como $m\angle ABC = 60°$ y $AB = a$, entonces la altura sobre el lado $\overline{BC}$ es igual a a sen $60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Con esto se deduce que el área del triángulo es igual a

$$(ABC) = \frac{1}{2}3a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}.$$

  Luego, aplicando ley de cosenos se obtiene que $AC^2 = a^2+9a^2-2\cdot a\cdot 3a\cdot\cos(60°) \Longrightarrow AC = a\sqrt{7}$. Finalmente, la altura sobre el lado AC se puede calcular como

$$h = \frac{2(ABC)}{AC} = \frac{2\cdot\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{4}}{a\sqrt{7}} = \frac{3a\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} = \frac{3a\sqrt{21}}{14}.$$

19. Considere la ecuación $\frac{1}{\pi}+\frac{1}{e}+\frac{1}{x}=\frac{1}{\pi+e+x}$ donde π y e son los números irracionales y x un número real. Podemos afirmar con certeza que dicha ecuación tiene
    (a) solución vacía
    (b) solución única
    (c) dos soluciones
    (d) infinita cantidad de soluciones

- Opción correcta: (c)
- Solución:
  Note que

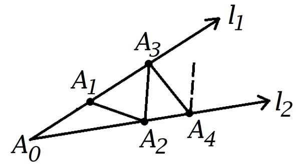
$$\frac{1}{\pi}+\frac{1}{e}+\frac{1}{x}=\frac{1}{\pi+e+x} \Leftrightarrow \frac{\pi+e}{\pi e}=\frac{1}{\pi+e+x}-\frac{1}{x}=\frac{x-(\pi+e+x)}{x(\pi+e+x)}=\frac{-(\pi+e)}{x(\pi+e+x)}.$$

  Dividiendo por $\pi+e$ y multiplicando los denominadores, obtenemos que

$$\frac{\pi+e}{\pi e}=\frac{-(\pi+e)}{x(\pi+e+x)} \Leftrightarrow x(\pi+e+x)=-\pi e \Leftrightarrow x^2+(\pi+e)x+\pi e=0 \Leftrightarrow (x+\pi)(x+e)=0.$$

  Por lo tanto la ecuación tiene dos soluciones: $x=-\pi$ y $x=-e$.

20. Considere dos rayos l_1 y l_2, como en la figura, que se intersecan en el punto A_0 y forman un ángulo de 9°:



Empezando con A_1 en l_1, se define el punto A_2 en l_2, con $A_2 \neq A_0$, de forma que los segmentos A_0A_1 y A_1A_2 miden lo mismo. De igual manera, se define el punto A_3 en l_1, con $A_3 \neq A_1$, de forma que los segmentos A_1A_2 y A_2A_3 miden lo mismo. Continuando con el mismo proceso, se definen los puntos $A_4, A_5, A_6, \ldots$, de forma que:

- los puntos $A_1, A_3, A_5, \ldots$ están sobre l_1 y $A_2, A_4, A_6, \ldots$ están sobre l_2,
- A_nA_{n+1} y $A_{n+1}A_{n+2}$ miden lo mismo para $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$
- $A_{n+2} \neq A_n$ para $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Sin embargo, no es posible continuar indefinidamente con esta construcción; es decir, existe un entero N tal que se pueden definir los puntos $A_1, A_2, \ldots, A_N$ de acuerdo con las condiciones anteriores, pero no es posible construir el punto A_{N+1}. Entonces, el valor de N es

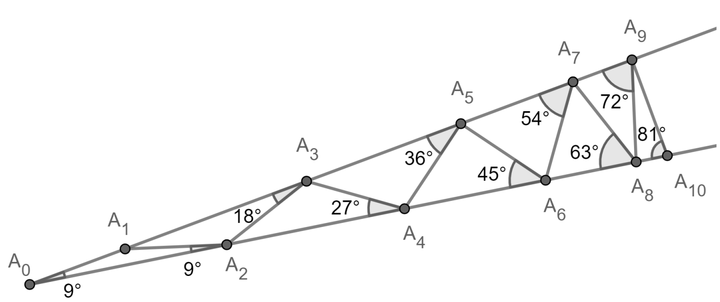
(a) 8

(b) 10

(c) 12

(d) 14

- Opción correcta: (b)
- Solución:
Usando que $A_0A_1 = A_1A_2$ y $m\angle A_1A_0A_2 = 9°$, obtenemos que $m\angle A_0A_2A_1 = 9°$ y $m\angle A_0A_1A_2 = 180° - 2 \cdot 9° > 90°$. Esto implica que si $A_1A_2 = A_2A_3$, entonces A_1 está entre A_0 y A_3, y $m\angle A_2A_1A_3 = 2 \cdot 9°$. Podemos repetir la idea de antes: usando que $A_1A_2 = A_2A_3$ y $m\angle A_2A_1A_3 = 2 \cdot 9°$, obtenemos que $m\angle A_0A_3A_2 = 2 \cdot 9°$ y $m\angle A_0A_2A_3 = 180° - 3 \cdot 9° > 90°$. Esto implica que si $A_2A_3 = A_3A_4$, entonces A_2 está entre A_0 y A_4, y $m\angle A_3A_2A_4 = 3 \cdot 9°$.



Este proceso puede ser repetido con las mismas conclusiones hasta obtener que $m\angle A_0A_9A_8 = 8 \cdot 9°$ y $m\angle A_0A_8A_9 = 180° - 9 \cdot 9° > 90°$, por lo que la condición $A_8A_9 = A_9A_{10}$ implica que A_{10} está entre A_0 y A_8, y $\angle A_9A_8A_{10} = 9 \cdot 9°$. Sin embargo, usando que $A_8A_9 = A_9A_{10}$ y $m\angle A_9A_8A_{10} = 9 \cdot 9°$, obtenemos que $m\angle A_0A_{10}A_9 = 9 \cdot 9°$ y $m\angle A_0A_9A_{10} = 180° - 10 \cdot 9° = 90°$. Esto nos dice que la condición $A_9A_{10} = A_{10}A_{11}$ implicaría que $A_{11} = A_9$. Por lo tanto, no es posible construir A_{11} bajo la condición $A_{11} \neq A_9$, y con esto concluimos que $N = 10$.