

Examen 1
Sábado 20 de junio del 2020

Problema 1. Sea ABC un triángulo y sea M el punto medio del segmento BC . La recta l pasa por B , es paralela a AM e interseca en el punto L a la recta AC . Sea D un punto en el segmento BL . Si P y Q son las intersecciones de CD con AM y AB , respectivamente, entonces pruebe que

$$\frac{CP}{QD} - \frac{AQ}{QB} = 1.$$

Problema 2. En un torneo participan $2n$ personas ($n \geq 5$) y se lleva a cabo en 4 días. En cada día todas las personas juegan exactamente un partido; es posible que dos participantes se enfrenten en varios días distintos.

- (a) Demuestre que es posible que el torneo finalice satisfaciendo las siguientes condiciones simultáneamente:
- hay una única persona ganadora,
 - hay exactamente tres personas en el segundo lugar,
 - ningún participante perdió los cuatro partidos.
- (b) Si suceden simultáneamente las condiciones antes descritas, entonces determine cuántas personas ganaron solamente un partido y cuántas ganaron exactamente dos partidos.

Problema 3. Sea $m > 1$ un entero positivo. Considere una sucesión de enteros a_1, a_2, \dots que satisface las igualdades

$$\sum_{d|n} a_d = m^n,$$

para todo entero positivo n , donde la suma de la expresión anterior se toma sobre los términos de la sucesión cuyo índice divide a n . Demuestre que n divide a a_n para todo n .

Horario del examen: 9:00 a.m. a 1:30 p.m.

Tiempo permitido: 4 horas 30 minutos

Cada problema vale 7 puntos