

Examen 3
Sábado 27 de junio del 2020

Problema 7. Decimos que una tripleta de números reales (x, y, z) es *feliz* si satisface simultáneamente las ecuaciones

$$x^2 - yz = y^2 - zx = z^2 - xy = 2020.$$

- (a) Demuestre que existen infinitas tripletas felices de números reales.
- (b) Demuestre que la cantidad de tripletas felices para las cuales al menos uno de x, y, z es un número entero, es finita.

Nota: No es necesario que describa ni enliste las soluciones en ninguno de las dos partes.

Advertencia: Es posible que en la impresión se confunda el signo de igual con el de resta. El problema indica que cada una de las tres expresiones $x^2 - yz$, $y^2 - zx$, $z^2 - xy$ es igual a 2020.

Problema 8. Encuentre todos los enteros no negativos a, b, c tales que $3^a + 11^b = c^2$.

Problema 9. Sea $N \geq 2$ un entero positivo. Encuentre la cantidad total de funciones $f : \{1, \dots, N\} \rightarrow \{1, \dots, N\}$ que satisfacen simultáneamente las siguientes condiciones:

- (a) $f(n) \leq f(n+1)$ para $n = 1, \dots, N-1$,
- (b) $f(f(n+1)) = f(n)$ para $n = 1, \dots, N-1$.

Horario del examen: 9:00 a.m. a 1:30 p.m.

Tiempo permitido: 4 horas 30 minutos

Cada problema vale 7 puntos