

Examen 4
Domingo 28 de junio del 2020

Problema 10. Encuentre todas las triplas de enteros positivos (a, b, c) tales que los números

$$\frac{bc + 1}{a}, \quad \frac{ca + 1}{b}, \quad \frac{ab + 1}{c}$$

son todos enteros positivos a la vez.

Problema 11. Sea ABC un triángulo no isósceles con $\angle BAC = 60^\circ$. Sean I y O el incentro y circuncentro del triángulo ABC , respectivamente. Demuestre que la recta BC , la recta OI y la mediatriz del segmento AI son concurrentes.

Nota: El incentro de un triángulo es el centro del círculo tangente a los tres lados en su interior. El circuncentro de un triángulo es el centro del círculo que pasa por los vértices.

Problema 12. Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$f^2(x + y) - f(2x^2) = f(y - x)f(x + y) + 2xf(y)$$

para cualesquiera números reales x, y .

Nota: La notación $f^2(x)$ indica el cuadrado de $f(x)$, es decir, $[f(x)]^2$.

Horario del examen: 9:00 a.m. a 1:30 p.m.

Tiempo permitido: 4 horas 30 minutos

Cada problema vale 7 puntos