

Examen 1
Sábado 18 de julio del 2020

Problema 1. Demuestre que para todo entero $n \geq 4$, el número racional $20/21$ se puede escribir como una suma de recíprocos de n enteros positivos distintos; es decir, demuestre que para todo $n \geq 4$ existen n enteros positivos distintos a_1, a_2, \dots, a_n para los cuales se cumple que

$$\frac{20}{21} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}.$$

Problema 2. Sean B y C dos puntos sobre una recta l . Dos círculos Γ_B y Γ_C son tangentes a la recta l en B y C , respectivamente, y se intersecan entre sí en dos puntos distintos A y D . Sea E el punto de intersección las bisectrices de los ángulos $\angle ABD$ y $\angle ACD$.

1. Pruebe que $\angle BEC = 90^\circ$.
2. Pruebe que E pertenece al segmento AD .

Problema 3. Decimos que un conjunto S de enteros positivos es *bueno* si para cualesquiera par de elementos $m, n \in S$, con $m \neq n$, se cumple que la diferencia $|m - n|$ divide a m y a n , simultáneamente.

1. Demuestre que un conjunto bueno no puede tener una cantidad infinita de elementos.
2. Demuestre que para todo entero positivo $N \geq 2$, existe un conjunto bueno con N elementos.

Horario del examen: 9:00 a.m. a 1:30 p.m.

Tiempo permitido: 4 horas 30 minutos

Cada problema vale 7 puntos