

**Examen 1**  
**Sábado 18 de julio del 2020**

**Problema 1.** Demuestre que para todo entero  $n \geq 4$ , el número racional  $20/21$  se puede escribir como una suma de recíprocos de  $n$  enteros positivos distintos; es decir, demuestre que para todo  $n \geq 4$  existen  $n$  enteros positivos distintos  $a_1, a_2, \dots, a_n$  para los cuales se cumple que

$$\frac{20}{21} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}.$$

**Problema 2.** Sean  $B$  y  $C$  dos puntos sobre una recta  $l$ . Dos círculos  $\Gamma_B$  y  $\Gamma_C$  son tangentes a la recta  $l$  en  $B$  y  $C$ , respectivamente, y se intersecan entre sí en dos puntos distintos  $A$  y  $D$ . Sea  $E$  el punto de intersección las bisectrices de los ángulos  $\angle ABD$  y  $\angle ACD$ .

1. Pruebe que  $\angle BEC = 90^\circ$ .
2. Pruebe que  $E$  pertenece al segmento  $AD$ .

**Problema 3.** Decimos que un conjunto  $S$  de enteros positivos es *bueno* si para cualesquiera par de elementos  $m, n \in S$ , con  $m \neq n$ , se cumple que la diferencia  $|m - n|$  divide a  $m$  y a  $n$ , simultáneamente.

1. Demuestre que un conjunto bueno no puede tener una cantidad infinita de elementos.
2. Demuestre que para todo entero positivo  $N \geq 2$ , existe un conjunto bueno con  $N$  elementos.

*Horario del examen: 9:00 a.m. a 1:30 p.m.*

*Tiempo permitido: 4 horas 30 minutos*

*Cada problema vale 7 puntos*