Examen 2
Domingo 19 de julio del 2020

Problema 4. Considere una sucesión de números reales $a_1, a_2, \ldots$ tal que $a_1 = 1$ y para $n \geq 2$ se cumple que a_n es $(n+1)/(n-1)$ veces la suma de todos los términos anteriores de la sucesión. Por ejemplo,

$$a_2 = \frac{3}{1}a_1, \quad a_3 = \frac{4}{2}(a_1 + a_2), \quad a_4 = \frac{5}{3}(a_1 + a_2 + a_3), \quad a_5 = \frac{6}{4}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4), \ldots.$$

Determine a_{2020}.

Problema 5. Sea k, m enteros positivos tales que 7 divide a $m - 2$ y 7^k divide a $m^6 - 1$. Demuestre que 7^k también divide a $(m+1)^6 - 1$.

Problema 6. Sea $n \geq 2$ un entero positivo. En una clase con n estudiantes, los cuales son posibles de distinguir entre sí, se quiere formar equipos para olimpiadas de matemática, física y química. Llamamos una *escogencia olímpica* al acto de elegir los tres equipos de manera que se cumpla lo siguiente:

1. la participación en los equipos no es obligatoria, es decir, puede que haya estudiantes que no pertenezcan a ningún equipo,
2. hay al menos un estudiante simultáneamente en los equipos de olimpiadas de matemática y física,
3. hay al menos un estudiante simultáneamente en los equipos de olimpiadas de matemática y química,
4. **no** hay ningún estudiante simultáneamente en los tres equipos.

Determine la cantidad total de escogencias olímpicas en una clase con n estudiantes.

Nota: Los equipos no tienen ningún orden interno; por ejemplo, el equipo de Alberto, Beatriz y Camilo es el mismo equipo de Beatriz, Camilo y Alberto. Sin embargo, las escogencias de los equipos sí distinguen entre los diferentes equipos; por ejemplo, una escogencia en que el equipo de física sea Diana y Erica y el de química sea Felipe, es distinta a una escogencia en que el equipo de física sea Felipe y el de química sea Diana y Erica.

Horario del examen: 9:00 a.m. a 1:30 p.m.

Tiempo permitido: 4 horas 30 minutos

Cada problema vale 7 puntos