Examen 3
Sábado 8 de agosto del 2020

Problema 7. Sea ABC un triángulo acutángulo. Sea A' el pie de la perpendicular desde A al lado BC y sean A_B y A_C los pies de las perpendiculares desde A' a los lados AC y AB, respectivamente. La construcción se repite para los otros dos vértices y similarmente se obtienen los puntos B', B_A y B_C, y C', C_A y C_B. Demuestre que existe una circunferencia que pasa simultáneamente por los seis puntos A_B, A_C, B_A, B_C, C_A y C_B.

Problema 8. Llamamos un *conjuntico* a un conjunto de 506 enteros positivos que satisfacen

$$0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{506} \leq 2020.$$

Para cada conjuntico consideramos el conjunto de 505 diferencias de términos consecutivos

$$d_1 = a_2 - a_1, \quad d_2 = a_3 - a_2, \quad d_3 = a_4 - a_3, \quad \ldots, \quad d_{505} = a_{506} - a_{505}.$$

Demuestre que para cualquier conjuntico existen más de 70 de estas diferencias que toman el mismo valor.

Nota: El valor repetido de las diferencias puede cambiar entre diferentes conjunticos.

Problema 9. Sea $N \geq 3$ un entero. Considere n reales $0 < a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_N$ tales que

$$\sum_{1 \leq i < j \leq N} a_i a_j = 1.$$

Demuestre que

$$\sum_{j=1}^{N-1} a_j < \sqrt{2}.$$

Nota: Para explicar la notación considere el caso particular $N = 4$. En este caso, tenemos que

$$\sum_{1 \leq i < j \leq 4} a_i a_j = a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_1 a_4 + a_2 a_3 + a_2 a_4 + a_3 a_4, \qquad \sum_{j=1}^{4-1} a_j = a_1 + a_2 + a_3.$$

Horario del examen: 1:30 p.m. a 6:00 p.m.

Tiempo permitido: 4 horas 30 minutos

Cada problema vale 7 puntos