**Examen 4**
**Domingo 9 de agosto del 2020**

**Problema 10.** Sean $a, b, c$ enteros positivos tales que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}.$$

Suponga que $a$ y $c$ no tienen divisores en común. Demuestre que $a+b$, $a-c$ y $b-c$ son todos cuadrados perfectos.

Nota: En caso de tener problemas con la impresión, los símbolos en la ecuación son una suma y una igualdad. Las expresiones $a+b$, $a-c$ y $b-c$ consisten en una suma y dos restas.

**Problema 11.** Dado un polígono, llamamos *tricolor* a una coloración de todos los vértices del polígono de blanco, azul o rojo. Decimos que una coloración tricolor es *trapecista* si existe algún subconjunto de cuatro vértices distintos que están pintados del mismo color y forman un trapecio isósceles.

1. En un polígono regular de 15 lados, demuestre que existe una coloración tricolor que **no** es trapecista.
2. En un polígono regular de 16 lados, demuestre que **toda** coloración tricolor es trapecista.

**Problema 12.** Sea $ABC$ un triángulo y sea $\Gamma$ su circuncírculo. Sea $D$, distinto de $B$ y $C$, un punto cualquiera sobre el arco $BC$ en $\Gamma$ que **no** contiene a $A$. Sobre los rayos $\overrightarrow{BD}$ y $\overrightarrow{CD}$ considere los puntos $E$ y $F$, respectivamente, tales que $BE = AC$ y $CF = AB$. Sea $M$ el punto medio de $EF$. Demuestre que $\angle BMC = 90°$.

Nota: El circuncírculo de un triángulo es el círculo que pasa por sus tres vértices. En $\Gamma$ hay dos arcos $BC$, uno contiene a $A$ y el otro no; el punto $D$ está sobre el que **no** contiene a $A$.

*Horario del examen: 9:00 a.m. a 1:30 p.m.*

*Tiempo permitido: 4 horas 30 minutos*

*Cada problema vale 7 puntos*