

Examen 1
Sábado 20 de junio del 2020

Problema 1. A y B tienen tres grupos de 2020 globos cada uno y juegan de la siguiente manera: un movimiento consiste en escoger uno de los grupos, descartar los globos de todos los grupos restantes y dividir el escogido en dos o tres grupos, con al menos un globo cada uno. Pierde la persona que no pueda hacer un movimiento completo. Si A empieza, entonces determine quién tiene la estrategia ganadora y describa la estrategia.

Nota: Una estrategia ganadora es una estrategia que le permite a un jugador asegurarse la victoria en un juego.

Problema 2. Sea ABC un triángulo y sea M el punto medio del segmento BC . La recta l pasa por B , es paralela a AM e interseca en el punto L a la recta AC . Sea D un punto en el segmento BL . Si P y Q son las intersecciones de CD con AM y AB , respectivamente, entonces pruebe que

$$\frac{CP}{QD} - \frac{AQ}{QB} = 1.$$

Problema 3. Llamamos un *producto pitagórico* al resultado de multiplicar tres enteros positivos a, b, c que satisfacen la igualdad $a^2 + b^2 = c^2$. Determine el máximo común divisor de todos los *productos pitagóricos*.

Horario del examen: 9:00 a.m. a 1:30 p.m.

Tiempo permitido: 4 horas 30 minutos

Cada problema vale 7 puntos