

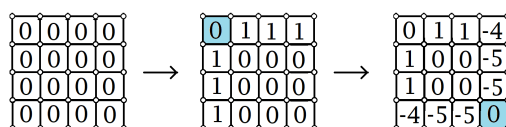
Problema 7. Sea ABC un triángulo isósceles con $AB = AC$. Sea D el punto en la recta AB tal que B es el punto medio del segmento AD y sea E la reflexión de D sobre la recta BC . Demuestre que CE pasa por el punto medio de AB .

Nota: La reflexión de un punto P sobre una recta l es un punto Q del otro lado de la recta, tal que PQ es perpendicular a l y l pasa por el punto medio de PQ .

Problema 8. Olcomae juega en un tablero de $N \times N$ empezando con un 0 en todas sus casillas. En cada paso, Olcomae elige una casilla y le suma un mismo entero (positivo o negativo) a todas las casillas en la misma columna y misma fila de la casilla seleccionada, sin sumarle nada a la que eligió. Decimos que el entero N es *bonito* si es posible que, después de una cantidad finita de pasos, Olcomae logre escribir 2020 en las N^2 casillas a la misma vez.

- Determine si el entero 2019 es bonito. En caso afirmativo, describa una serie finita de pasos con la que Olcomae pueda escribir 2020 en las 2019^2 casillas simultáneamente.
- Determine si el entero 506 es bonito. En caso afirmativo, describa una serie finita de pasos con la que Olcomae pueda escribir 2020 en las 506^2 casillas simultáneamente.

Nota: Olcomae puede repetir la casilla en diferentes pasos y puede sumar enteros distintos en diferentes pasos. En la figura se muestran dos pasos posibles en un tablero 4×4 .



Problema 9. Decimos que una tripleta de números reales (x, y, z) es *feliz* si satisface simultáneamente las ecuaciones

$$x^2 - yz = y^2 - zx = z^2 - xy = 2020.$$

- Demuestre que existen infinitas tripletas felices de números reales.
- Demuestre que la cantidad de tripletas felices para las cuales al menos uno de x, y, z es un número entero, es finita.

Nota: No es necesario que describa ni enliste las soluciones en ninguno de las dos partes.

Advertencia: Es posible que en la impresión se confunda el signo de igual con el de resta. El problema indica que cada una de las tres expresiones $x^2 - yz$, $y^2 - zx$, $z^2 - xy$ es igual a 2020.

Horario del examen: 9:00 a.m. a 1:30 p.m.

Tiempo permitido: 4 horas 30 minutos

Cada problema vale 7 puntos