

**Examen 3**  
**Sábado 27 de junio del 2020**

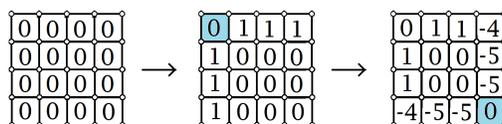
**Problema 7.** Sea  $ABC$  un triángulo isósceles con  $AB = AC$ . Sea  $D$  el punto en la recta  $AB$  tal que  $B$  es el punto medio del segmento  $AD$  y sea  $E$  la reflexión de  $D$  sobre la recta  $BC$ . Demuestre que  $CE$  pasa por el punto medio de  $AB$ .

Nota: La reflexión de un punto  $P$  sobre una recta  $l$  es un punto  $Q$  del otro lado de la recta, tal que  $PQ$  es perpendicular a  $l$  y  $l$  pasa por el punto medio de  $PQ$ .

**Problema 8.** Olcomae juega en un tablero de  $N \times N$  empezando con un 0 en todas sus casillas. En cada paso, Olcomae elige una casilla y le suma un mismo entero (positivo o negativo) a todas las casillas en la misma columna y misma fila de la casilla seleccionada, sin sumarle nada a la que eligió. Decimos que el entero  $N$  es *bonito* si es posible que, después de una cantidad finita de pasos, Olcomae logre escribir 2020 en las  $N^2$  casillas a la misma vez.

- Determine si el entero 2019 es bonito. En caso afirmativo, describa una serie finita de pasos con la que Olcomae pueda escribir 2020 en las  $2019^2$  casillas simultáneamente.
- Determine si el entero 506 es bonito. En caso afirmativo, describa una serie finita de pasos con la que Olcomae pueda escribir 2020 en las  $506^2$  casillas simultáneamente.

Nota: Olcomae puede repetir la casilla en diferentes pasos y puede sumar enteros distintos en diferentes pasos. En la figura se muestran dos pasos posibles en un tablero  $4 \times 4$ .



**Problema 9.** Decimos que una tripleta de números reales  $(x, y, z)$  es *feliz* si satisface simultáneamente las ecuaciones

$$x^2 - yz = y^2 - zx = z^2 - xy = 2020.$$

- Demuestre que existen infinitas tripletas felices de números reales.
- Demuestre que la cantidad de tripletas felices para las cuales al menos uno de  $x, y, z$  es un número entero, es finita.

Nota: No es necesario que describa ni enliste las soluciones en ninguno de las dos partes.

Advertencia: Es posible que en la impresión se confunda el signo de igual con el de resta. El problema indica que cada una de las tres expresiones  $x^2 - yz$ ,  $y^2 - zx$ ,  $z^2 - xy$  es igual a 2020.

Horario del examen: 9:00 a.m. a 1:30 p.m.

Tiempo permitido: 4 horas 30 minutos

Cada problema vale 7 puntos