

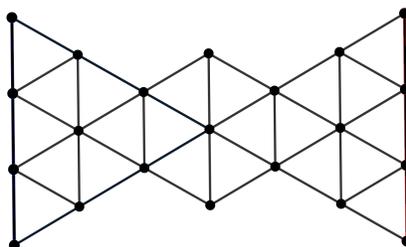
Examen 4
Domingo 28 de junio del 2020

Problema 10. Juan y Luis juegan pintando de negro en el tablero en blanco que se muestra en la figura. Empieza Juan y luego pintan alternadamente una casilla a la vez, como se detalla a continuación.

- (a) En su turno inicial, Juan pinta de negro una de las casillas del tablero.
- (b) Luego, Luis pinta de negro una de las casillas en blanco.
- (c) En los turnos siguientes, cada jugador pinta de negro una casilla en blanco que comparta un lado con alguna de las últimas dos casillas negras pintadas.

Pierde el primer jugador que no pueda pintar una casilla. Determine quién tiene la estrategia ganadora y describa la estrategia.

Nota: Una estrategia ganadora es una estrategia que le permite a un jugador asegurarse la victoria en un juego.



Problema 11. Encuentre todas las tripletas de enteros positivos (a, b, c) tales que los números

$$\frac{bc + 1}{a}, \quad \frac{ca + 1}{b}, \quad \frac{ab + 1}{c}$$

son todos enteros positivos a la vez.

Problema 12. Sea $ABCDEF$ un hexágono convexo y \mathcal{S} un círculo en su interior, tal que \mathcal{S} es tangente a todos los lados del hexágono. El círculo \mathcal{S} es tangente a los lados AB , CD y EF en sus puntos medios L , M y N , respectivamente. El círculo \mathcal{S} es tangente a los lados BC , DE y FA en los puntos P , Q y R , respectivamente. Demuestre que las rectas LQ , MR y NP pasan todas por un mismo punto.

Horario del examen: 9:00 a.m. a 1:30 p.m.

Tiempo permitido: 4 horas 30 minutos

Cada problema vale 7 puntos