OLIMPIADAS COSTARRICENSES DE MATEMÁTICA
CAPACITACIÓN I ELIMINATORIA
III NIVEL. TEMA: Álgebra

Enunciados y soluciones de los problemas

1. (IE, IIIN, 2019) Si $a^2 + ab + b^2 = 3$ entonces la expresión $\dfrac{a^3 - b^3}{(a-b)^2}$ es equivalente a

   (a) $\dfrac{a-b}{3}$

   (b) $\dfrac{a-b}{1-ab}$

   (c) $\dfrac{3(a-b)}{1-ab}$

   (d) $\dfrac{2(a+b)}{3}$

- Opción correcta: b)
- Solución:

$$\begin{aligned}\frac{a^3-b^3}{(a-b)^2} &= \frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{a^2-2ab+b^2}\\ &= \frac{(a-b)\cdot 3}{a^2+ab+b^2-3ab}\\ &= \frac{3(a-b)}{3-3ab}\\ &= \frac{a-b}{1-ab}\end{aligned}$$

2. (IE, IIIN, 2019) Al realizar la suma

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + ... + \frac{1}{\sqrt{2018}+\sqrt{2019}}$$

   el resultado corresponde a

   (a) $\sqrt{2018}+1$

   (b) $\sqrt{2018}-1$

   (c) $\sqrt{2019}+1$

   (d) $\sqrt{2019}-1$

- Opción correcta: (d)
- **Solución:** Observe que

$$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{n-(n+1)} = \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{-1} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

Así, podemos reescribir la suma de la forma:

$$\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)+...+\left(\sqrt{2019}-\sqrt{2018}\right) = -\sqrt{1}+\sqrt{2019} = \sqrt{2019}-1$$

3. (IE, IIIN, 2019) La cantidad de pares ordenados (x, y) de números enteros que son solución de la ecuación $x^2y + 2xy - 2019 = 0$ corresponde a
   (a) 0
   (b) 1
   (c) 2
   (d) 3

- Opción correcta: (d)
- Solución: Veamos que $x^2y + 2xy = 2019 \Rightarrow xy(x + 2) = 2019 = 1 \cdot 3 \cdot 673$. Como se trata de números enteros no puede darse $x = 673$ ó $x = -673$, pues no se obtendría un valor entero para y. Entonces puede darse $x = 1$, $x = -1$, $x = -3$ ó $x = 3$.
  Si $x = 1$ se tiene $x + 2 = 3$ y $y = 673$.
  Si $x = -1$ se tiene $x + 2 = 1$ y $y = -2019$.
  Si $x = -3$ se tiene $x + 2 = -1$ y $y = 673$.
  Si $x = 3$ se tiene $x + 2 = 5$ pero y no sería entero.

  Entonces los únicos pares ordenados posibles son$(x, y) = (1, 673)$, $(x, y) = (-1, -2019)$, $(x, y) = (-3, 673)$. Así solo hay 3 pares de soluciones.

4. (IE, IIIN, 2019) Si se sabe que $a+b = 4$ y $b-a = c+5$, el valor numérico de $a^2+2a+ac+2b+bc-b^2$ es
   (a) -20
   (b) -12
   (c) 12
   (d) 20

- Opción correcta: (b)

- Solución: Del enunciado se tiene que

$$
\begin{aligned}
a^2+2a+ac+2b+bc-b^2 &= 2a+2b+ac+bc+a^2-b^2\\
&= 2\,(a+b)+c\,(a+b)+(a+b)\,(a-b)\\
&= (a+b)\,(2+c+a-b)
\end{aligned}
$$

Del enunciado, $b-a=c+5 \Rightarrow b-a=3+2+c \Rightarrow -3=2+c+a-b$.
Así, $(a+b)\,(2+c+a-b)=4\cdot -3=-12$.

5. (IE, IIIN, 2019) La cantidad de números primos p tales que $\dfrac{p^2+6p+5}{p^2-6p-7}$ sea un número entero corresponde a

   (a) 0
   (b) 3
   (c) 5
   (d) 12

- Opción correcta: (c)
- Solución:
  Factorizando el numerador y el denominador obtenemos que

$$\frac{p^2+6p+5}{p^2-6p-7}=\frac{(p+1)(p+5)}{(p+1)(p-7)}=\frac{p+5}{p-7}.$$

Ahora, note que

$$\frac{p+5}{p-7}=\frac{p-7+5+7}{p-7}=1+\frac{12}{p-7},$$

por lo que basta examinar la fracción $\dfrac{12}{p-7}$.

El conjunto de los divisores enteros de 12 es $D_{12}=\{\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm6,\pm12\}$. Resolviendo las ecuaciones $p-7=d$, con $d\in D_{12}$, se obtienen $-5,1,3,4,5,6,8,9,10,11,13,19$ por lo que $p\in\{3,5,11,13,19\}$.

6. (IE, IIIN, 2018) Sean a y b dos números reales positivos. Si $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}=4$, entonces el valor de $\dfrac{a+b}{a-b}$ es

   (a) 2
   (b) 4
   (c) $\sqrt{2}$
   (d) $\sqrt{3}$

- Opción correcta: (d)

- Solución:

  Observe que

$$\begin{aligned} \frac{a}{b}+\frac{b}{a}=4 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{a^2+b^2}{ab}=4 \\ &\Leftrightarrow \quad a^2+b^2=4ab \end{aligned}$$

  sumando $2ab$ se obtiene que $(a+b)^2 = 6ab$, y restando $2ab$ se obtiene que $(a-b)^2 = 2ab$, Luego

$$\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2} = \frac{6ab}{2ab} = 3$$

  luego, $\dfrac{a+b}{a-b} = \sqrt{3}$.

7. (IE, IIIN, 2018) Si a y b son números reales positivos que cumplen $x^3y^4 = a$ y $x^5y^6 = b$, entonces x es

   (a) $\dfrac{b^2}{a^3}$

   (b) $\dfrac{b}{a}$

   (c) $\sqrt{\dfrac{a^5}{b^3}}$

   (d) $\sqrt{\dfrac{b}{a}}$

- Opción correcta: (a)

- Solución:

  Despejando la y en la primer ecuación tenemos $y = \sqrt[4]{\frac{a}{x^3}}$. Sustituyendola en la segunda,

$$x^5 \cdot \left(\sqrt[4]{\frac{a}{x^3}}\right)^6 = b \Rightarrow x^{5-\frac{3}{4}\cdot 6} = \frac{b}{\sqrt[2]{a^3}} \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{b}{\sqrt[2]{a^3}} \Rightarrow x = \boxed{\frac{b^2}{a^3}}$$