OLIMPIADAS COSTARRICENSES DE MATEMÁTICA
CAPACITACIÓN I ELIMINATORIA
III NIVEL. TEMA: Geometría

Enunciados y soluciones de los problemas

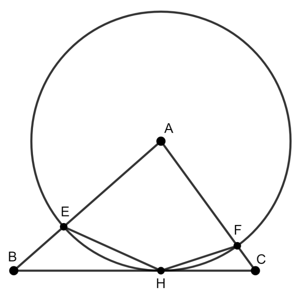
1. (IE, IIIN, 2019) Considere el triángulo $\triangle ABC$ de la figura adjunta, en donde $m\angle ABC = 40°$ y $m\angle ACB = 60°$, H es el pie de la altura desde A sobre el lado $\overline{BC}$. Sean E y F las intersecciones de la circunferencia con centro A y radio AH con los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, respectivamente. La medida del ángulo $\angle EHF$ es

   (a) $140°$

   (b) $150°$

   (c) $160°$

   (d) $170°$



- Opción correcta: (a)
- Solución: Note que los triángulos $\triangle AHE$ y $\triangle AHF$ son isósceles. Como $\overline{AH}$ es perpendicular a $\overline{BC}$ se tiene que $m\angle BAH = 50°$ y $m\angle CAH = 30°$, de donde $m\angle AHE = 65°$ y $m\angle AHF = 75°$. Así $m\angle EHF = 65° + 75° = 140°$.

2. (IE, IIIN, 2019) Sea $\triangle ABC$ un triángulo tal que $AB = 24$cm., $AC = 32$cm. y $BC = 40$cm. y sea M el punto medio de $\overline{BC}$. $\square AMDE$ es un cuadrado, y $\overline{MD}$ intersecta $\overline{AC}$ en el punto F. Si $\dfrac{AF}{FC} = \dfrac{25}{7}$ y $AM = 20$, entonces el área del cuadrilátero $\square AFDE$, en cm^2, es

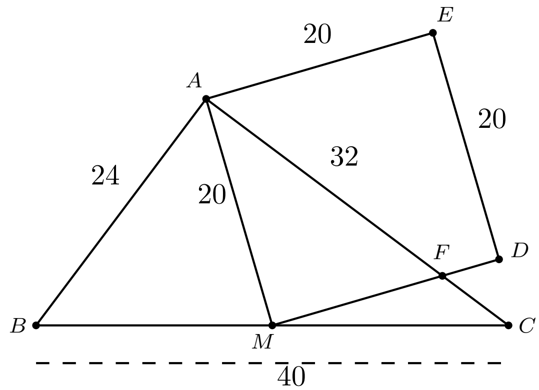
   (a) 200

   (b) 250

   (c) 275

   (d) 300

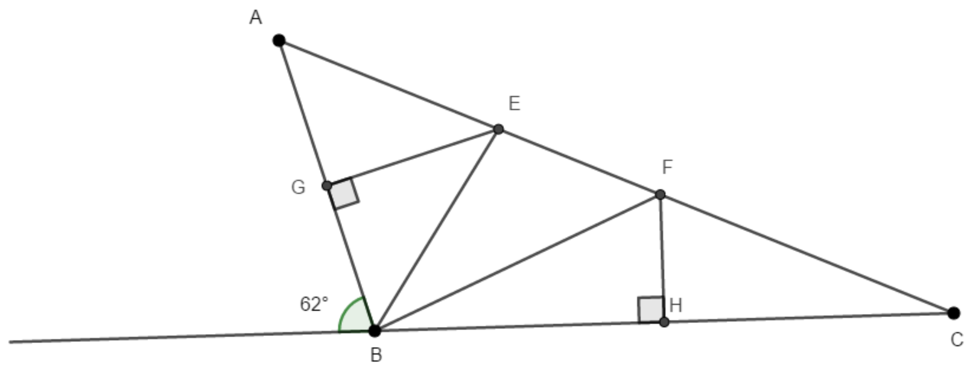
- Opción correcta: (b)
- Solución:



Se tiene que $(AEDM) = 400$.
Como $\dfrac{AF}{FC} = \dfrac{25}{7}$ y $AF + FC = 32$ entonces $AF = 25$ y $FC = 7$.
Como los $\triangle AMB$ y $\triangle CMA$ tienen la misma base (20) y la misma altura, entonces tienen la misma área.
$(BAC) = \dfrac{24 \cdot 32}{2} = 384$, pues es rectángulo.
Luego $(ACM) = 192$; además $(ACM = 192) = \dfrac{32 \cdot h_2}{2}$, por lo que la altura del $\triangle ACM$ sobre el lado $\overline{AC}$ es 12.
Después $(AMF) = 150$. Finalmente $(AFDE) = 400 - 150 = 250$.

3. (IE, IIIN, 2019) En un triángulo ABC, la medida del ángulo exterior en el vértice B es $62°$ y las mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ cortan al lado $\overline{AC}$ en E y F, respectivamente. La medida del ángulo $\angle EBF$ es
   (a) $118°$
   (b) $90°$
   (c) $62°$
   (d) $56°$

- Opción correcta: (d)
- **Solución:** Considere la figura:



Como el ángulo exterior mide $62°$ se tiene que $m\angle ABC = 118°$.
Además se tiene que $\triangle AEG \sim \triangle BEG$ usando criterio $l.a.l.$, por lo que se concluye que $m\angle EAG = m\angle EBG = m\angle ABE$; y $\triangle CFH \sim \triangle BFH$ usando criterio $l.a.l.$, por lo que se concluye que $m\angle FCH = m\angle FBH = m\angle FBC$.(*)
Ahora bien, sabemos que $62° = m\angle BAC + m\angle BCA$ (ángulo exterior), por lo tanto se cumple que $62° = m\angle EBG + m\angle FBH$ por resultado (*).
Por otra parte se cumple que: $m\angle ABC = m\angle ABE + m\angle EBF + m\angle FBC$ esto es $118° = m\angle ABE + m\angle EBF + m\angle FBC = 62° + m\angle EBF$ por lo que se concluye que $m\angle EBF = 56°$ que es lo buscado.

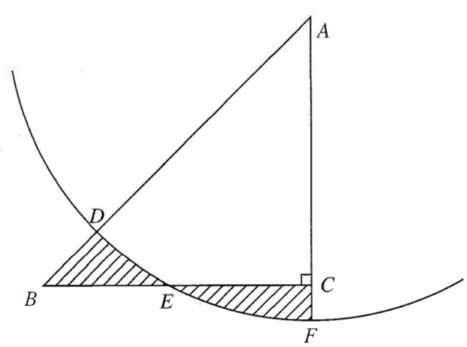
4. (IE, IIIN, 2019) En la figura adjunta, el $\triangle ABC$ es recto en C, $AC = BC = 1$ y $\widehat{DEF}$ es un arco de la circunferencia con centro en A. Si las áreas de la regiones sombreadas son iguales y $AD = \dfrac{x}{\sqrt{\pi}}$, el valor de la x es

   (a) 1

   (b) 2

   (c) 3

   (d) 4



- Opción correcta: (b)
- Solución: Como el área del $\triangle ABC$ y el área del sector DAF son iguales, entonces se tiene que

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{\pi}}\right)^2 \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2$$

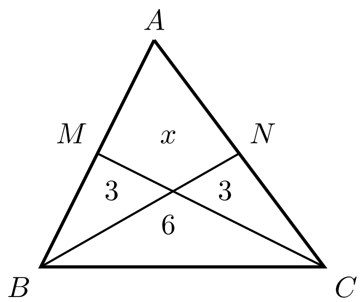
5. (IE, IIIN, 2018) En la figura adjunta, M y N son los puntos medios de los lados correspondientes del triángulo que se muestra. Si 3, 3 y 6 corresponden, respectivamente, al área de cada triángulo, el área del cuadrilátero donde se encuentra x es

   (a) 4

   (b) 5

   (c) 6

   (d) 7



- Opción correcta: (c)
- Solución:

  Nótese que $AN = NC$, y como los triángulos $\triangle ANB$ y $\triangle NCB$ tienen la misma altura, y la misma base, por lo que tienen la misma área, por lo que $x + 3 = 6 + 3$, es decir, $x = 6$.

6. (IE, IIIN, 2018) En un triángulo rectángulo la medida de un cateto es dos tercios de la medida del otro cateto. El seno del ángulo agudo de mayor medida es

   (a) $\dfrac{\sqrt{13}}{13}$

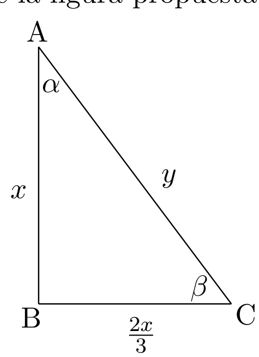
   (b) $\dfrac{3\sqrt{3}}{13}$

   (c) $\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$

   (d) $\dfrac{13\sqrt{3}}{3}$

- Opción correcta: (c)
- Solución:

  Observe la figura propuesta,



  Como $x > \dfrac{2x}{3}$ entonces se tiene que $\alpha < \beta$, por lo que para poder calcular el seno se debe obtener el valor de y en términos de x, así:

$$y^2 = \left(\frac{2x}{3}\right)^2 + x^2 \Rightarrow y^2 = \frac{4x^2}{9} + x^2 \Rightarrow y^2 = \frac{13x^2}{9} \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{13x^2}{9}} \Rightarrow y = \pm\frac{x}{3}\sqrt{13}$$

* Se elimina el valor negativo por ser una figura geométrica.*
Por lo tanto, al aplicar la fórmula del seno, se obtiene:

$\sin\beta = \dfrac{x}{\frac{x}{3}\sqrt{13}} = \dfrac{3\sqrt{13}}{13}$

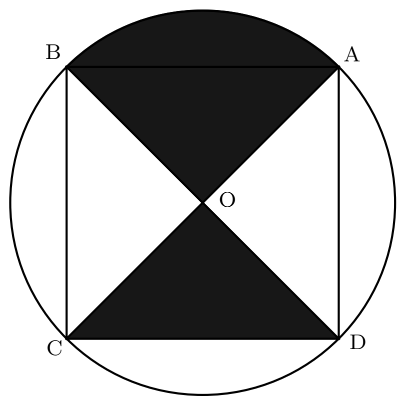
7. (IE, IIIN, 2018) En la figura adjunta, las diagonales del cuadrado $\square ABCD$ se intersecan en el punto O. Si el área del círculo de radio $\overline{OD}$ es 18π cm^2, entonces el área de la región sombreada, en cm^2, es

   (a) $9 + \dfrac{9\pi}{2}$

   (b) $\dfrac{9}{2} + 9\pi$

   (c) $\dfrac{9}{4} + \dfrac{9\pi}{2}$

   (d) $\dfrac{9}{2} + 9\pi$



- Opción correcta: (a)
- Solución:

  El área de la región sombreada es la cuarta parte del área del círculo sumada con la cuarta parte del área del cudrado.

  Sea $r = \overline{OD}$ es el radio del círculo, como el área del círculo es 18π se tiene que $\pi r^2 = 18\pi \Rightarrow r = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. De esta manera, $BD = 2r = 6\sqrt{2}$, por lo que $CD = 6$ y el área del cuadrado es 36.

  El área de la región sombreada es $\dfrac{18\pi}{4} + \dfrac{36}{4} = \dfrac{9\pi}{2} + 9$.

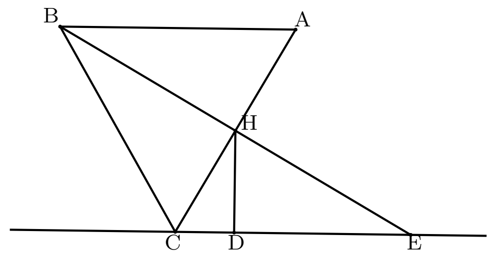
8. (IE, IIIN, 2018) En la figura adjunta, el $\triangle ABC$ es equilátero, D está en $\overleftrightarrow{CE}$ que es paralela al $\overline{AB}$, y $\overline{BE}$ divide al $\angle CBA$ en dos ángulos de igual medida. Si H es el punto donde se cortan $\overline{AC}$ y $\overline{BE}$, $HD = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ es la medida de una altura del $\triangle CHE$ y $DC = \dfrac{3}{2}$, entonces el área del $\triangle ABC$ es

(a) $3\sqrt{3}$

(b) $5\sqrt{3}$

(c) $6\sqrt{3}$

(d) $9\sqrt{3}$



- Opción correcta: (d)
- Solución:

  En el $\triangle CDH$ y usando el teorema de Pitágoras se tiene que $CH^2 = CD^2 + DH^2 \Rightarrow CH = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 3$.

  Como $\triangle ABC$ es equilátero y $\overline{BE}$ biseca al $\angle CBA$, $\overline{BH}$ es altura de dicho triángulo y mediatriz. Luego $AH = CH = 3$, por lo que cada uno de los lados del $\triangle ABC$ mide 6.

  El área de este triángulo es $\dfrac{6 \cdot 3\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$.

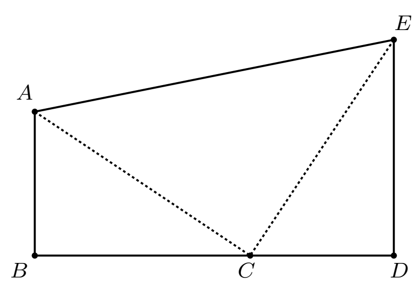
9. (IE, IIIN, 2018) En la figura adjunta $\square ABDE$ es un trapecio rectángulo con ángulos rectos en B y D. Si $\dfrac{BC}{AB} = \dfrac{DE}{BC} = \dfrac{4}{3}$, $\angle CED \cong \angle BCA$ y $BD = 6$, AE es

   (a) $\dfrac{20}{3}$

   (b) $\dfrac{25}{4}$

   (c) $\dfrac{27}{4}$

   (d) $\dfrac{31}{5}$



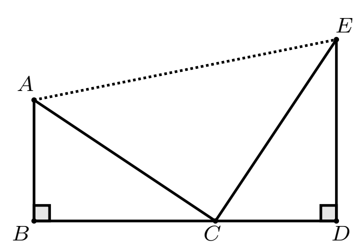
- Opción correcta: (b)
- Solución:

  Como $m\angle CED + m\angle DCE = 90$ entonces $m\angle BCA + m\angle DCE = 90$ y así $m\angle ACE = 90$.

  Por otro lado como $m\angle BCA + m\angle CAB = 90$ y $m\angle BCA + m\angle DCE = 90$ entonces $m\angle CAB = m\angle DCE$ y de esta forma $\triangle ABC \sim \triangle CDE$ (A-A).

  De la semenjaza anterior y de los datos en el enunciado tenemos $\frac{BC}{AB} = \frac{DE}{CD} = \frac{4}{3} = \frac{DE}{BC}$ y así $BC = CD = 3$.

  De la igualdad anterior y utilizando una de las hipótesis suministradas tenemos que $\frac{BC}{AB} = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \frac{9}{4} = AB$ entonces $AC^2 = \left(\frac{9}{4}\right)^2 + 3^2$ y de ahí $AC = \frac{15}{4}$.



  Ahora como $\frac{DE}{CD} = \frac{4}{3}$ entonces $DE = 4$ y así $CE = 5$

Finalmente aplicando Pitágoras en el $\triangle ACE$ tenemos que $AE^2 = \left(\frac{15}{4}\right) + 5^2$ y de ahí $AE = \dfrac{25}{4}$.

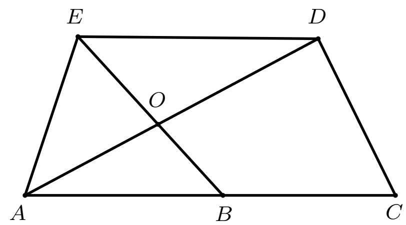
10. (IE, IIIN, 2018) En la figura adjunta el $\square ACDE$ es un trapecio tal que $ED = 15$, $AC = 24$ y la altura del trapecio es 12. Si B es el punto medio $\overline{AC}$, el área del $\square OBCD$ es

    (a) 78

    (b) 112

    (c) 122

    (d) 234



- Opción correcta: (b)
- Solución:

  $(ACDE) = \frac{1}{2}(24+15)\cdot 12 = 234$, $(OBCD) = 234 - ((DEA) + (AOB))$

  $\triangle EOD \sim \triangle BOA(A-A)$ dado que $\angle EOD \cong \angle AOB$ por ser ángulos opuestos por el vértice; $\angle EDA \cong \angle DAC$ por ser ángulos alternos internos entre paralelas.

  Sea h la altura del $\triangle EDO$ trazada desde el vértice O, se sigue que la medida de la altura del $\triangle AOB$, trazada desde el vértice O es $12 - h$ y de la semejanza se concluye que:

  $$\frac{15}{12} = \frac{h}{12-h} \quad \Rightarrow h = \frac{20}{3} \quad 12 - h = \frac{16}{3}$$

  $$(DEA) = \frac{15\cdot 12}{2} = 90; \ \triangle AOB = \frac{12\cdot \frac{16}{3}}{2} = 32$$

  $$\therefore (OBCD) = 234 - (90+32) = 234 - 122 = 112$$