Enunciados y soluciones de los problemas

1. (IE, IIIN, 2019) La suma de todos los números enteros positivos menores que 200 que tienen exactamente 3 divisores distintos corresponde a

   (a) 377

   (b) 419

   (c) 547

   (d) 661

- Opción correcta: (a)
- Solución:

  Los únicos números enteros que cumplen con la condición son los cuadrados de los números primos 2, 3, 5, 7, 11 y 13, cuyos cuadrados son 4, 9, 25, 49, 121 y 169, cuya suma es 377.

2. (IE, IIIN, 2019) Sea n un número entero que al ser dividido por 3 deja residuo 1 y al ser dividido por 5 deja residuo 2. El residuo que deja n al ser dividido por 15 es

   (a) 4

   (b) 7

   (c) 11

   (d) 14

- Opción correcta: $b)$
- Solución:

  Al dividir n por 5 el residuo es 2 entonces (1) $n = 5k + 2, k \in \mathbb{Z}$, luego $k = 3q + r, 0 \leq r < 2$. Sustituyendo en (1) tenemos que

  $$n = 5(3q + r) + 2 = 15q + 5r + 2$$

  .

  Por otro lado, el residuo de dividir n por 3 es el mismo de $(5r + 2)$ y como dicho residuo es 1 entonces el valor de r es 1. De esta forma $n = 15q + 7$

3. (IE, IIIN, 2019) La cantidad de números enteros positivos menores a 2019 que son múltiplos de 3 o 5, pero no de 7 corresponde a

   (a) 808

   (b) 856

   (c) 906

   (d) 942

- Opción correcta: Ninguna

- Solución: Hay $[2019/3] = 673$ múltiplos de 3, $[2019/5] = 403$ múltiplos de 5, $[2019/15] = 134$ múltiplos de 15, menores que 2019, así hay $673 + 403 - 134 = 942$ múltiplos de 3 o 5; de estos hay que quitar los que son múltiplos de 7.
  Hay $[2019/21] = 96$ múltiplos de 21, $[2019/35] = 57$ múltiplos de 35 y $[2019/105] = 19$ múltiplos de 105, por lo que entre estos hay $96 + 57 - 19 = 134$ múltiplos de 7. Por lo que en total hay $942 - 134 = 808$ múltiplos de 3 y 5, pero no de 7 menores que 2019.

4. (IE, IIIN, 2018) Si n y m son números naturales tales que $\dfrac{1280}{m\,(n+1)} = n^n$, entonces el valor de m es

   (a) 1

   (b) 2

   (c) 4

   (d) 5

- Opción correcta: (a)

- Solución:

  Debe cumplirse que $1280 = m(n+1)n^n$. Además $1280 = 2^8 \cdot 5 = 2^{2\cdot 4} \cdot 5 = (2^2)^4 \cdot 5 = 4^4 \cdot (4+1)$. Lo que significa que $n = 4$ y $m = 1$

5. (IE, IIIN, 2018) La suma de los dígitos del número entero positivo n que cumple que $n+1$ y $\dfrac{n}{8} + 34$ son cubos perfectos es

   (a) 17

   (b) 18

   (c) 19

   (d) 20

- Opción correcta: (a)

- Solución:

  Si $n + 1 = x^3$ y $\frac{n}{8} + 34 = y^3$ entonces $271 = 8y^3 - x^3 = (2y - x)(4y^2 + 2yx + x^2)$. Como 271 es primo se tiene que $2y - x = 1$, de donde $(x + 1)^2 + (x + 1)x + x^2 = 271 \Rightarrow x^2 + x - 90 = 0 \Rightarrow (x + 10)(x - 9) = 0$, de donde $x = 9$, y así $n = 728$ y la suma de sus dígitos es 17.