Enunciados y soluciones de los problemas

1. (IE, IIN, 2018)El resultado de la operación $\dfrac{2018 \times 2{,}018}{20{,}18 \times 201{,}8}$ es

   (a) 0,1
   (b) 1
   (c) 10
   (d) 100

   Solución

$$
\begin{aligned}
\frac{2018 \times 2,018}{20,18 \times 201,8} &= \frac{2018 \times \dfrac{2018}{1000}}{\dfrac{2018}{100} \times \dfrac{2018}{10}} \\
&= \frac{\dfrac{2018^2}{1000}}{\dfrac{2018^2}{100 \times 10}} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

2. (IE, NA, 2012) Si $a = 2$ y $b = 3$, la expresión $\dfrac{\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}}{\dfrac{b}{a} + \dfrac{1}{ab}} - 1$ es equivalente a:

   a) $\dfrac{23}{10}$
   b) $\dfrac{1}{2}$
   c) $\dfrac{3}{10}$
   d) $\dfrac{-3}{2}$

Solución

En este ejercicio, se sustituyen tanto $a = 2$ como $b = 3$ en la expresiÃşn algebraica, para determinar su valor numÃľrico:

$$\frac{\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}}{\dfrac{b}{a}+\dfrac{1}{ab}}-1 \quad = \quad \frac{\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{2}}{\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}}-1$$

Posteriormente se resuelven las operaciones con fracciones y se simplifica:

$$\frac{\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{2}}{\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}}-1 \quad = \quad \frac{\dfrac{13}{6}}{\dfrac{5}{3}}-1=\frac{13}{10}-1=\frac{3}{10}$$

3. (IE, NB, 2011) Sean x, y nÃžmeros reales tales que $x+y=2(x-y)$. Entonces, el valor numÃľrico de la expresiÃşn $\dfrac{x^3+x^2y-y^3}{xy^2}$ es

   a) $\dfrac{35}{3}$

   b) $\dfrac{29}{3}$

   c) $\dfrac{29}{2}$

   d) $\dfrac{35}{2}$

SoluciÃşn: En este ejercicio, no se nos da un valor especifico para x y y, sino que se tiene que $x+y=2(x-y)$, simplificando esta ultima expresiÃşn:

$$x+y=2(x-y)$$

$$x+y=2x-2y$$

$$3y=x$$

Por otro lado, si se observa la expresiÃşn que tenemos que calcular y la separamos en tres fracciones, que se pueden simplificar:

$$\begin{aligned}\frac{x^3+x^2y-y^3}{xy^2} &= \frac{x^3}{xy^2}+\frac{x^2y}{xy^2}-\frac{y^3}{xy^2}\\ &= \frac{x^2}{y^2}+\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\end{aligned}$$

Ahora, sustituyendo $x = 3y$ en esta ultima expresiÃşn obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\frac{x^2}{y^2} + \frac{x}{y} - \frac{y}{x} &= \frac{(3y)^2}{y^2} + \frac{3y}{y} - \frac{y}{3y} \\
&= \frac{9y^2}{y^2} + \frac{3y}{y} - \frac{y}{3y} \\
&= 9 + 3 - \frac{1}{3} = \frac{35}{3}
\end{aligned}
$$

4. Sean a, b y c números enteros positivos, tales que $a^2b = 28$, $b^2c = 147$ y $c^2a = 18$. El valor de abc es

   (a) 14

   (b) 21

   (c) 28

   (d) 42

   Solución

   Observe que $a^2bb^2cc^2a = a^3b^3c^3 = 28 \cdot 147 \cdot 18 = 2^2 \cdot 7 \cdot 7^2 \cdot 3 \cdot 3^2 \cdot 2 = 2^3 \cdot 7^3 \cdot 3^3$, como a, b y c son positivos, entonces debe cumplirse que $abc = 2 \cdot 7 \cdot 3 = 42$. La respuesta correcta es la opciÃşn (d)

5. (IE, IIN, 2015) Si $m = \sqrt[n]{4^{2-n}}$ el valor numÃľrico de $(4m)^{\frac{3n}{2}}$ corresponde a

   a) 2
   b) 4
   c) 16
   d) 64

   Solución

   Se procede a sustituir el valor de m en la expresiÃşn $(4m)^{\frac{3n}{2}}$, se obtiene como resultado:

$$
\begin{aligned}
(4m)^{\frac{3n}{2}} &= \left(4\sqrt[n]{4^{2-n}}\right)^{\frac{3n}{2}} \\
&= \left(4^n \cdot 4^{2-n}\right)^{\frac{3}{2}} \\
&= \left(4^2\right)^{\frac{3}{2}} \\
&= 64
\end{aligned}
$$

6. (IE, IIN, 2014) Una expresiÃşn equivalente a $\left[\dfrac{\sqrt{(3x+4y)(4y-3x)+9x^2}}{2y}\right]^3$ con $x>0$ y $y>0$ corresponde a:

   a) 3

   b) 6

   c) 8

   d) 9

Solución

Para empezar hay que notar, que dentro de la raÃŋz, hay una fÃşrmula notable.

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\sqrt{(3x+4y)(4y-3x)+9x^2}}{2y}\right]^3 &= \left[\frac{\sqrt{(4y+3x)(4y-3x)+9x^2}}{2y}\right]^3 \\
&= \left[\frac{\sqrt{16y^2-9x^2+9x^2}}{2y}\right]^3 \qquad \textit{simplifique tÃľrminos} \\
&= \left[\frac{\sqrt{16y^2}}{2y}\right]^3 \qquad \textit{extraer raÃŋz } \sqrt{16y^2}=4y>0 \\
&= \left[\frac{4y}{2y}\right]^3 = [2]^3 = 8
\end{aligned}$$

7. (IE, NA, 2011) Un valor equivalente a $x=\sqrt{7-\sqrt{40}}$ corresponde a

   a) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$

   b) $\sqrt{\dfrac{7\sqrt{10}+20}{\sqrt{10}}}$

   c) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

   d) $\sqrt{2}-\sqrt{5}$

Solución

Observe que para simplificar la raÃŋz, se debe factorizar de el subradical $7-\sqrt{40}$.

$$\begin{aligned} 7-\sqrt{40} &= 7-\sqrt{2^2\cdot 5\cdot 2} \\ &= 7-\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{2} \\ &= 7-2\sqrt{5}\cdot\sqrt{2} \end{aligned}$$

Ahora, por conveniencia separamos el nÃžmero 7 en 5 y 2.

$$\begin{aligned} 7-\sqrt{40} &= 7-2\sqrt{5}\cdot\sqrt{2} \\ &= \boxed{5}-2\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}+\boxed{2} \\ &= (\sqrt{5})^2-2\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2 \\ &= \left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Por tanto la la expresiÃşn

$$\sqrt{7-\sqrt{40}}=\sqrt{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2}=\left|\sqrt{5}-\sqrt{2}\right|=\sqrt{5}-\sqrt{2}$$

Las barras del valor absoluto significa que debo garantizar que lo que “sale de la raÃŋz” (de Ãŋndice par) debe ser positivo. Pero como $\sqrt{5}$ es mayor que $\sqrt{2}$ la resta es positiva y podemos eliminar el valor absoluto sin problemas.

8. (IE, IIN, 2011) Al racionalizar el denominador de $\dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$ y simplificar se obtiene una expresiÃşn cuyo denominador es

   a) $x+3$

   b) $x-1$

   c) 1

   d) 3

<u>Solución</u>

Para racionalizar el denominador de una fracciÃşn, se multiplica el numerador y el denominador por una expresiÃşn conveniente, de tal forma que se complete la tercera fÃşrmula notable :

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2} &= \underbrace{\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}\cdot\frac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x+3}+2}}_{\textit{completar la tercera fÃşrmula notable}} \\ &= \frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{\left(\sqrt{x+3}\right)^2-2^2} \\ &= \frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{x+3-4} \\ &= \frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1}=\sqrt{x+3}+2 \end{aligned}$$

Por lo tanto el denominador de la nueva fracciÃşn es 1

9. (IE, NA, 2010) Don Genaro tiene una mula. Un dÃŋa alguien le preguntÃş por la edad del animal. A lo que Ãľl contestÃş : “En cuatro aÃśos serÃŋa tres veces de lo que era hace cuatro aÃśos. Determine la edad actual de la mula de Don Genaro”.

   a) 2 aÃśos

   b) 4 aÃśos

   c) 6 aÃśos

   d) 8 aÃśos

   <u>Solución</u>

   Representemos con x la edad actual de la mula, entonces se tiene que:
   En cuatro aÃśos: se representa como $x + 4$.
   Hace cuatro aÃśos: se representa como $x - 4$.
   Tres veces de lo que era hace cuatro aÃśos: se representa como $3(x - 4)$. Entonces

$$\begin{aligned} x+4 &= 3(x-4) \\ x+4 &= 3x-12 && \textit{agrupemos } x \textit{ a la izquierda y los nÃžmeros a la derecha} \\ x-3x &= -12-4 \\ -2x &= -16 \\ x &= \frac{-16}{-2} = 8 && \textit{la edad actual de la mula} \end{aligned}$$

10. Sean a, b y c nÃžmeros reales tales que $a + b - c = 1$, entonces la soluciÃşn de la ecuaciÃşn $3x(a + b) = 3(x + 2)(c - 1)$es

    <u>Solución</u>
    Note que :

$$\begin{aligned} 3x(a+b) &= 3(x+2)(c-1) && \textit{cancelar el } 3 \\ x(a+b) &= (x+2)(c-1) \\ ax+bx &= cx-x+2c-2 \\ ax+bx-cx &= -x+2c-2 \\ x(a+b-c) &= -x+2c-2 && \textit{como } a+b-c=1 \\ x\cdot 1 &= -x+2c-2 \\ 2x &= 2c-2 \\ x &= c-1 \end{aligned}$$

11. (IE, NA, 2010) En un zoolÃşgico hay jirafas y avestruces. Si en total se contabilizan 30 ojos y 44 patas, Â£cuÃąntas avestruces hay?

    a) 7

    b) 8

    c) 9

    d) 10

<u>Solución</u>

El problema se puede resolver con un sistema de ecuaciones. Para ello llamemos: NÃžmero de jirafas: x
NÃžmero de avestruces: y, entonces
Cantidad de ojos: $2x+2y=30$, hay 30 ojos en total y cada animal tiene claramente 2. Cantidad de patas: $4x+2y=44$, hay 44 patas, cuatro de jirafas, dos de avestruces.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+2y & = & 30 \\ 4x+2y & = & 44 \end{array}\right.$$

Hay varios mÃľtodos[1] para resolver sistemas ecuaciones, pero vamos a usar un mÃľtodo conocido como sustituciÃşn. La idea es despejar una incÃşgnita de alguna de las ecuaciones (normalmente la mÃąs simple), en este caso escogemos despejar y de la primera ecuaciÃşn.

$$\begin{array}{rcl} 2x+2y & = & 30 \\ 2y & = & 30-2x \\ y & = & \dfrac{30-2x}{2} \\ y & = & 15-x \end{array}$$

Ahora, sustituimos $y=15-x$ en la segunda ecuaciÃşn

$$\begin{array}{rcl} 4x+2y & = & 44 \\ 4x+2(15-x) & = & 44 \\ 4x+30-2x & = & 44 \\ 2x & = & 14 \\ x & = & 7 \end{array}$$

Finalmente, sustituyendo $x=7$, en $y=15-x$ se tiene que $y=15-7=8$, lo que significa que hay 7 jirafas y 8 avestruces.

[1] Ver http://www.math.com.mx/docs/sec/sec_0014_Sistemas_Lineales.pdf

12. (IIE, IIN, 2015) En un edificio de apartamentos viven 105 personas; de ellas, el nÃžmero de parejas casadas es la tercera parte del nÃžmero de hombres solteros y el nÃžmero de mujeres solteras es el doble del nÃžmero de hombres casados. El nÃžmero total de hombres que viven en el edificio es

   a) 15
   b) 30
   c) 45
   d) 60

   <u>Solución</u>

   Sea x el nÃžmero de parejas casadas, observe que:

GÃľnero	Casados	Solteros
Hombres	x	$3x$
Mujeres	x	$2x$

   Entonces $x + x + 3x + 2x = 105$, de donde $x = 15$

Genero	Casados	Solteros
Hombres	$x = 15$	$3x = 45$
Mujeres	$x = 15$	$2x = 30$

   Por tanto hay 60 hombres

13. (IE, NB, 2012) El recÃŋproco de la suma de los recÃŋprocos de dos nÃžmeros es $\dfrac{14}{3}$. Si la suma de los nÃžmeros es 21 entonces su producto es igual a

   a) $\dfrac{9}{2}$
   b) $\dfrac{2}{9}$
   c) $\dfrac{1}{98}$
   d) 98

14. (IE, NB, 2012) Si $P(x)$ es un polinomio tal que -3 y 5 son dos de sus ceros, entonces, con certeza se puede asegurar que un factor del polinomio $Q(x) = P(x) + (x^2 - 9)(x + 5)$ es

   a) $x + 5$
   b) $x - 3$

c) $x-5$

d) $x+3$

15. (IE, IIN, 2013) Sean a, b, c nÃžmeros enteros positivos tales que $ab=12$, $bc=20$ y $ac=15$. Entonces, el valor de abc es

a) 40

b) 17

c) 30

d) 34 *ÃĎtem 8, I Eliminatoria 2013, II Nivel*

16. (IE, IIN, 2015)Al efectuar $\dfrac{\left(\dfrac{4a}{b}-\dfrac{b}{a}\right)^{-1}}{\left(\dfrac{4a}{b}-4+\dfrac{b}{a}\right)^{-1}}$ se obtiene como resultado

a) 1
b) -1
c) $\dfrac{2a-b}{2a+b}$
d) $\dfrac{2a+b}{2a-b}$

17. (IE, IIN, 2018) Christian, Alexander y Leonel tienen entre los tres 435 monedas de 100 colones. Christian gasta la mitad de sus monedas, Alexander gasta la tercera parte de sus monedas y Leonel la cuarta parte de sus monedas. Ahora los tres tienen la misma cantidad de monedas. Entonces, la cantidad de monedas que tenía inicialmente Alexander es

(a) 120

(b) 135

(c) 180

(d) 220

Solución

Sean x, y, z las monedas que tienen inicialmente Christian, Alexander y Leonel respectivamente. Es claro que

$$x+y+z=435.$$

De acuerdo con la información, después de haber gastado cierta cantidad de monedas cada uno se tiene que

$$\frac{1}{2}x = \frac{2}{3}y = \frac{3}{4}z,$$

despejando y y z en términos de x y sustituyendo en la primera ecuación se tiene que

$$x + \frac{3}{4}x + \frac{2}{3}x = 435,$$

y resolviendo se obtiene que $x = 180$, y entonces $y = 135$. La respuesta correcta es la opciÃşn (b).