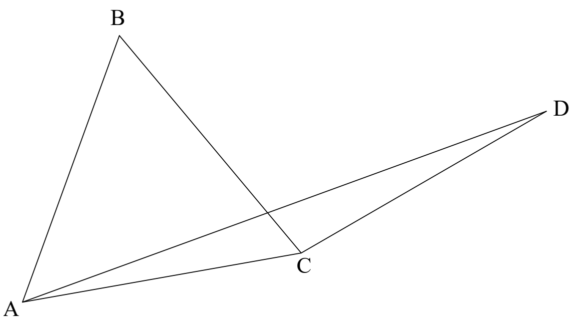
OLIMPIADAS COSTARRICENSES DE MATEMÁTICA
CAPACITACIÃŞN I ELIMINATORIA

II NIVEL - GEOMETRÃŊA

1. (IE, IIN, 2016) En la figura el $\triangle ABC$ es equilÃątero y $CB = CD$. Si $m\angle BCD = 100°$, entonces $m\angle BAD$ es



   (a) $10°$

   (b) $20°$

   (c) $40°$

   (d) $50°$

- OpciÃşn correcta: d)
- SoluciÃşn:

  Como $CB = CD$ y $\triangle ABC$ es equilÃątero, entonces $CD = CA$ y el $\triangle ACD$ es isÃşsceles. En este triÃąngulo, $m\angle ACD = 160° \Rightarrow m\angle CAD = m\angle CDA = 10°$.

  Dado que el $\triangle ABC$ es equiÃąngulo, $m\angle BAC = 60° \Rightarrow m\angle BAD = 60° - 10° = 50°$.

2. (IE, IIN, 2018) Considere el triÃąngulo rectÃąngulo $\triangle ABC$, recto en B. Sea M un punto sobre $\overline{BC}$, $B - M - C$, con $\overline{AM}$ bisectriz de $\angle BAC$. Si $m\angle AMC = 115°$, entonces la medida de $\angle MCA$ es

   (a) $25°$

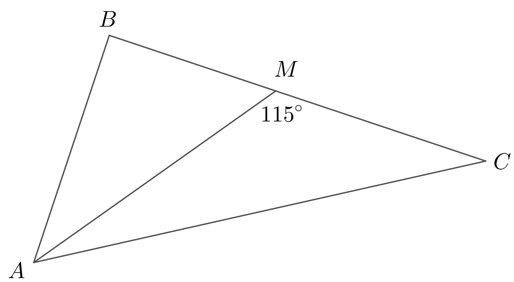
   (b) $40°$

   (c) $65°$

   (d) $115°$

- OpciÃşn correcta: (b)
- SoluciÃşn:

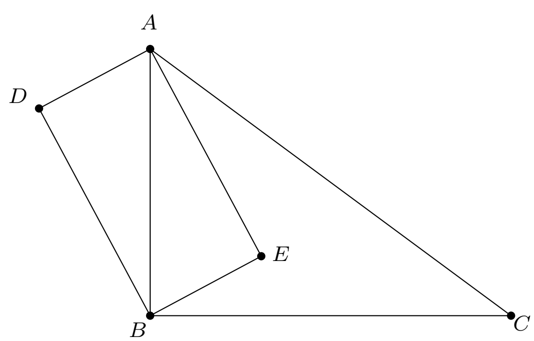
  Considere la siguiente figura.



$m\angle BMA = 180° - 115° = 65°$, como el triÃąngulo $\triangle ABC$ rectÃąngulo en B entonces $m\angle BAM = 25°$. $\overline{AM}$ es bisectriz de $\angle BAC$ por lo tanto $m\angle MAC = 25°$, luego $m\angle MCA = 40°$.

3. (IE, IIN, 2017) En la figura adjunta, el $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo con $m\angle ABC = 90°$; además, $\overline{AB}$ es diagonal del rectángulo $\square ADBE$. Si $BC = 5\sqrt{2}$, $BE = 3$ y $AC = 5\sqrt{3}$, entonces el área del $\square ADBE$ es

   (a) 5
   (b) 6
   (c) 12
   (d) 14



- OpciÃşn correcta: c
- SoluciÃşn:

  Utilizando el teorema de Pitágoras en el $\triangle ABC$, se tiene:

$$\begin{aligned} & AB^2 + \left(5\sqrt{2}\right)^2 = \left(5\sqrt{3}\right)^2 \\ \Rightarrow\ & AB^2 = 25 \cdot 3 - 25 \cdot 2 = 25 \\ \Rightarrow\ & AB = 5 \end{aligned}$$

  Utilizando el teorema de Pitágoras en el $\triangle ABE$, se tiene:

$$\begin{aligned} & AE^2 + 3^2 = 5^2 \\ \Rightarrow\ & AE^2 = 25 - 9 = 16 \\ \Rightarrow\ & AE = 4 \end{aligned}$$

  Luego, $(ADBE) = 3 \cdot 4 = 12$.

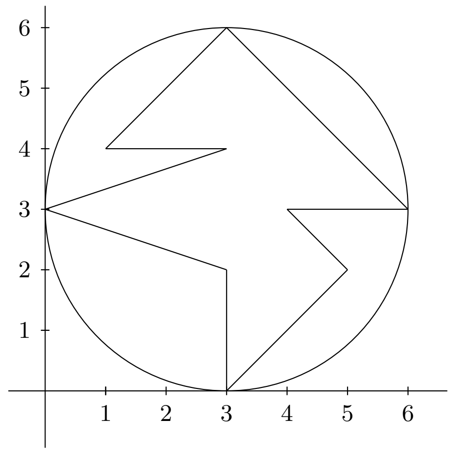
4. (IE, IIN, 2018) De acuerdo con la informacón de la figura adjunta, el área de la región que está dentro de la circunferencia pero fuera del polígono es

(a) $9\pi - 12$

(b) $9\pi - 13$

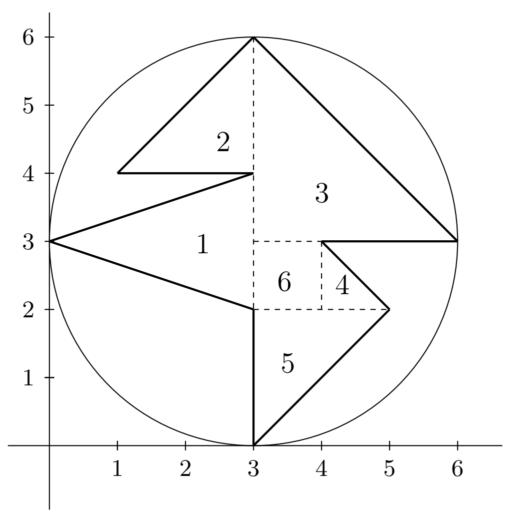
(c) $9\pi - 12{,}5$

(d) $9\pi - 13{,}5$



- Opción correcta: (b)
- Solución:

  Considerando la siguiente división del polígono se tiene



$$A_1 = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3,\; A_2 = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2,\; A_3 = \frac{3 \cdot 3}{2} = 4{,}5,\; A_4 = \frac{1 \cdot 1}{2} = 0{,}5,\; A_5 = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2,\; A_6 = 1$$

$A_p = 13$

Por lo que el Ãąrea pedida es $9\pi - 13$.

5. (IE, IIN, 2018) En la figura adjunta se presentan tres triÃąngulos rectÃąngulos isÃşsceles, donde la hipotenusa del mediano mide la mitad de la hipotenusa del grande, y la del pequeÃśo la mitad de la del mediano. Si un cateto del triÃąngulo grande mide 1 cm, entonces la longitud de la línea

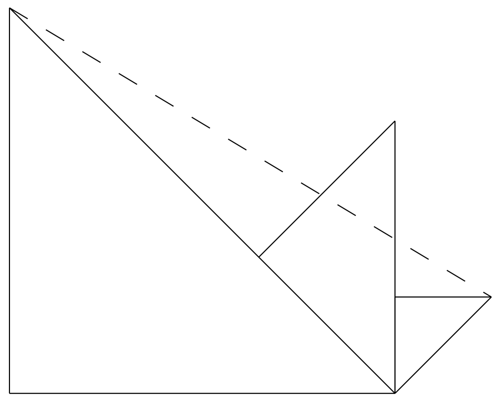
punteada es

(a) $\dfrac{\sqrt{34}}{4}$

(b) $\dfrac{\sqrt{17}}{4}$

(c) $\dfrac{\sqrt{17}}{2}$

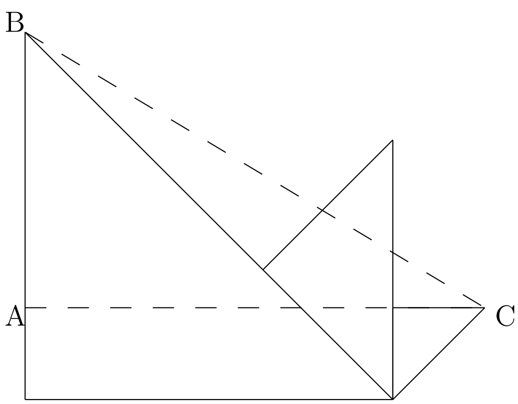
(d) $\dfrac{\sqrt{34}}{2}$



- OpciÃşn correcta: (a)
- SoluciÃşn:

  Por semajanza de triÃąngulos, la relaciÃşn entre las hipotenusas se mantiene entre los catetos, por lo que el cateto del trÃąngulo mediano mide $\dfrac{1}{2}$ y el del triÃąngulo pequeÃśo $\dfrac{1}{4}$.

  Entonces la figura siguiente, $AB = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$, $AC = 1 + \dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{4}$

  Aplicando el Teorema de PitÃągoras se tiene que $BC = \sqrt{\dfrac{34}{16}} = \dfrac{\sqrt{34}}{4}$

6. (IE, IIN, 2018) En la figura adjunta, $\triangle ABC$ es equilátero, $C-E-D$, $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overline{AB}$, $\overline{BE}$ es mediatriz de $\overline{AC}$ y F es el punto de intersección de $\overline{AC}$ con $\overline{BE}$.

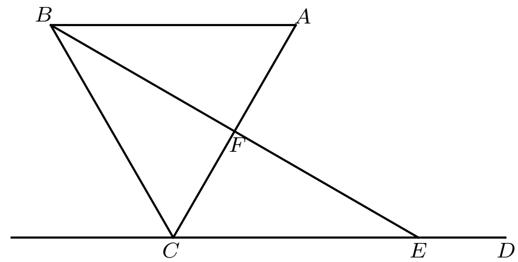
   Si el área de $\triangle CFE = 2\sqrt{3}$ cm^2, entonces el perímetro, en cm, de $\triangle ABC$ es

(a) 12

(b) 24

(c) $2\sqrt{3}$

(d) $6\sqrt{3}$



- OpciÃşn correcta: (a)
- SoluciÃşn:

  Como el triÃąngulo ABC es equilÃątero, $\overline{BF}$ es, además de una de sus mediatrices, una mediana, una bisectriz y una altura, por lo que los triángulos $\triangle ABF$ y $\triangle CBF$ son congruentes.

  Como $\overline{AB} \parallel \overline{CE}$, por ángulos entre paralelas se tiene que $\angle ACE \cong \angle CAB$ y $\angle ABE \cong \angle CEB$. Además, por ser opuestos por el vértice, $\angle AFB \cong \angle CFE$ y se cumple que $AF = CF$, pues $\overline{BE}$ es mediatriz de $\overline{AC}$. De esta manera, $\triangle ABF \cong \triangle CEF$.

  Luego, $(CFE) = 2\sqrt{3} = (ABF)$. De esta manera, $(ABC) = 2 \cdot (ABF) = 4\sqrt{3}$

  Así, $\dfrac{BA^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3} \Rightarrow BA^2 = 16 \Rightarrow BA = 4$ y el perímetro de $\triangle ABC = 4 \cdot 3 = 12$ cm.

7. (IE, IIN, 2018) Considere el $\triangle ABC$ recto en B, y sea D un punto, tal que $A-D-C$ y $\overline{BD} \perp \overline{AC}$. Si $\dfrac{CD}{AD} = \dfrac{3}{7}$, la razÃşn entre las áreas de los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle ADB$ es

   (a) $\dfrac{7}{3}$

   (b) $\dfrac{3}{7}$

   (c) $\dfrac{10}{3}$

   (d) $\dfrac{10}{7}$

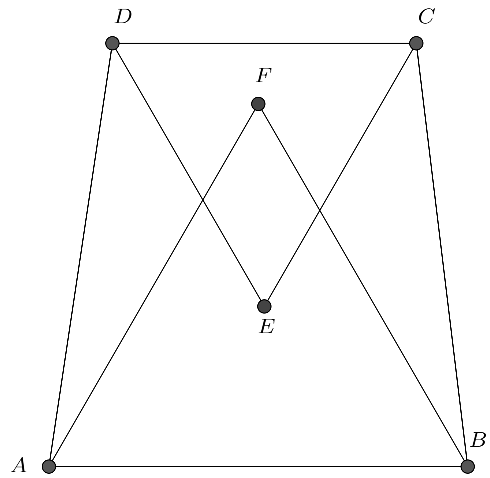
- OpciÃşn correcta: (d)
- SoluciÃşn:

  $\overline{BD}$ es la altura de $\triangle ABC$ (sobre la hipotenusa) y del $\triangle ADB$ (sobre el cateto $\overline{AD}$); asÃŋ, se tiene:

$$\frac{(ABC)}{(ADB)} = \frac{\frac{1}{2}AC \cdot BD}{\frac{1}{2}AD \cdot BD} = \frac{AC}{AD} = \frac{AD + CD}{AD} = 1 + \frac{CD}{AD} = 1 + \frac{3}{7} = \frac{10}{7}$$

8. (IE, IIN, 2016) Considere un trapecio isÃşsceles $ABCD$, con $\overline{AB} \| \overline{CD}$, $AB = 7$, $CD = 5$ y la altura sobre $\overline{AB}$ de medida $5\sqrt{3}$. Si se trazan dos triÃąngulos equilÃąteros en el interior del

trapecio, tal como se muestra en la figura, entonces la medida de $\overline{EF}$ es



(a) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(b) $\sqrt{3}$

(c) $2\sqrt{3}$

(d) $4\sqrt{3}$

- OpciÃşn correcta: *b*)
- SoluciÃşn:

  Como el trapecio es isÃşsceles, se tiene que la recta por $\overline{EF}$ es perpendicular a $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$. La altura del triÃąngulo ABF trazada desde F mide $7\sqrt{3}/2$ y la del triÃąngulo CDE desde E mide $5\sqrt{3}/2$.

  Por lo tanto, si h es la altura del trapecio y $x = EF$, tenemos que:

  $h = \left(5\sqrt{3}/2 - x\right) + x + \left(7\sqrt{3}/2 - x\right)$

  Y asÃŋ, $x = \sqrt{3}$.

9. (IE, IIN, 2016) En un triÃąngulo ABC se tiene que la medida del $\angle ACB$ es $40°$. Si P es el punto de intersecciÃşn de las bisectrices de los Ãąngulos $\angle CAB$ y $\angle ABC$, entonces la medida del $\angle APB$ es

   (a) $80°$

   (b) $100°$

   (c) $110°$

   (d) $140°$

- OpciÃşn correcta: *c*)
- SoluciÃşn:

  Como la suma de las medidas de los Ãąngulos internos de todo triÃąngulo es $180°$, se tiene que la suma de las medidas de los Ãąngulos $\angle CAB$ y $\angle CBA$ es $140°$.

  En el triÃąngulo APB, las medidas de los Ãąngulos $\angle PAB$ y $\angle PBA$ suman $70°$, debido a que $\overline{AP}$ y $\overline{BP}$ son bisectrices. Por lo tanto, $m\angle APB = 110°$.

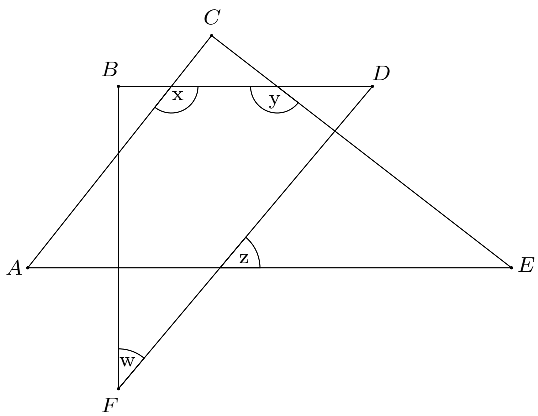
10. (IE, IIN, 2016) En la figura $\overline{AC} \parallel \overline{FD}$, $\overline{BD} \parallel \overline{AE}$, $\overline{BD} \perp \overline{BF}$ y $\overline{AC} \perp \overline{CE}$. Entonces $x+y+z+w$ es

(a) 270°

(b) 360°

(c) 390°

(d) 450°



- OpciÃşn correcta: *b*)
- SoluciÃşn:

  Sea G, H, P intersecciones de $\overline{AC}$ con $\overline{BD}$, $\overline{AE}$ con $\overline{DF}$ y $\overline{CE}$ con $\overline{BD}$ respectivamente.
  Vemos que el $\square AGDH$ es un paralelogramo, por lo que si $m\angle AGD = x$ entonces $z = 180° - x$.
  Además, $m\angle AHF = z = 180° - x$.

  Luego, de acuerdo con el teorema de la suma de las medidas de los ángulos internos de todo triángulo, se tiene $90° + w + z = 180° \Rightarrow 90° + w + (180° - x) = 180° \Rightarrow w = x - 90°$.

  Por otra parte, $m\angle GCP + m\angle GPC = x$, por el teorema del ángulo externo; como $m\angle GCP = 90° \Rightarrow m\angle GPC = x - 90°$.
  Entonces $y = 180° - (x - 90°) = 270° - x$.
  Finalmente $x + y + z + w = x + (270° - x) + (180° - x) + (x - 90°) = 360°$.

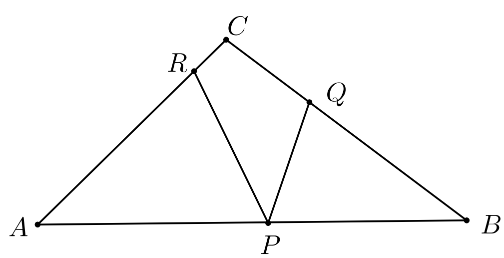
11. (IE, IIN, 2017) En la figura adjunta, se tiene que $\overline{AC} \perp \overline{BC}$, $BQ = BP$ y $AR = AP$. La medida del $\angle RPQ$ es

(a) 30°

(b) 45°

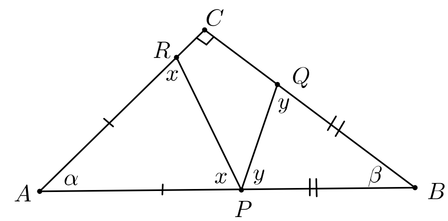
(c) 90°

(d) 135°



- OpciÃşn correcta: *b*
- SoluciÃşn:

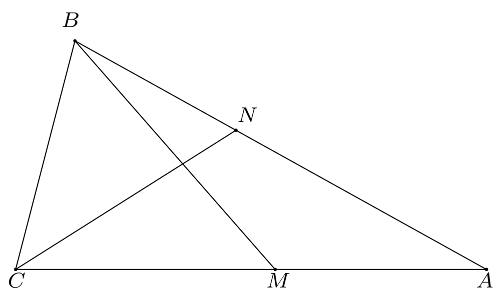
De acuerdo con la informaciÃşn dada, se tiene la figura adjunta.
Donde $m\angle ACB = 90°$, pues $\overline{AC} \perp \overline{BC}$. Donde la $m\angle \alpha + m\angle \beta + m\angle ACB = 180° \Rightarrow m\angle \alpha + m\angle \beta = 90°$ (1), esto por el teorema de la suma de las medidas de los Ãąngulos internos de un triÃąngulo.
AdemÃąs, se tiene que $BQ = BP$, por la clasificaciÃşn de triÃąngulos de acuerdo con la medida de sus Ãąngulos internos y con la medida de sus lados se tiene que el triÃąngulo $\triangle BPQ$ es isÃşsceles, entonces los Ãąngulos $\angle BPQ = \angle PQP = y$. Entonces $m\angle \beta = 180° - 2m\angle y$ (2).



Por otro lado se tiene que: $AP = AR$, por la clasificaciÃşn de triÃąngulos de acuerdo con la medida de sus Ãąngulos internos y con la medida de sus lados se tiene que el triÃąngulo $\triangle APR$ es isÃşsceles entonces $\angle APR = \angle ARP = x$. Entonces $m\angle \alpha = 180° - 2m\angle x$ (3).

Luego se sustituye (2) y (3) en (1), se tiene: $180° - 2m\angle x + 180° - 2m\angle y = 90° \Rightarrow m\angle x + m\angle y = 135°$. Por Ãžltimo, se tiene que: $m\angle RPQ = 180° - m\angle x - m\angle y \Rightarrow m\angle RPQ = 45°$.

12. (IE, IIN, 2017) En la figura adjunta se tiene que $m\angle BCN = 6x$, $m\angle CBM = 5x$, $m\angle CMB = 5x$, $m\angle BNC = 4x$ y $m\angle BAC = 2x$. La medida del $\angle ABM$ es



(a) 20°

(b) 30°

(c) 40°

(d) 60°

- OpciÃşn correcta: b
- SoluciÃşn:

Sean $m\angle ABM = b$ y $m\angle ACN = a$
Por suma de ángulos internos del $\triangle BCN$ tenemos $15x + b = 180$. (1)
Por suma de ángulos internos del $\triangle CMB$ tenemos $16x + a = 180$.
Igualando ambas ecuaciones tenemos $15x + b = 16x + a \Longrightarrow b - x = a$ Ahora por suma de ángulos internos del $\triangle ABC$ tenemos:

$$13x + a + b = 180 \Rightarrow 13x + b - x + b = 180 \Rightarrow 12x + 2b = 180 \Rightarrow 6x + b = 90 \Rightarrow b = 90 - 6x$$

Ahora sustituyendo en (1) tenemos $15x + 90 - 6x = 180 \Rightarrow 9x = 90 \Rightarrow x = 10$ y así $b = 30$. $\therefore m\angle ABM = 30$.

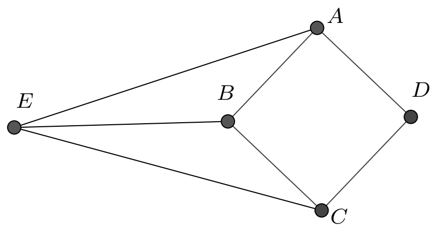
13. (IE, IIN, 2016) Considere la figura adjunta en la que el $\square ABCD$ es un cuadrado y $AE = CE$. Si se sabe que $BE = 4\sqrt{2}$ y las Ãąreas del $\square ABCD$ y del $\triangle ABE$ son iguales, entonces el Ãąrea del cuadrado $ABCD$ es

(a) 2

(b) 4

(c) 8

(d) 16



- OpciÃşn correcta: b)
- SoluciÃşn:

  Como $AE = CE$, se tiene que $D - B - E$. La altura h del triÃąngulo ABE trazada desde el vÃľrtice A corresponde a la mitad de la diagonal del cuadrado. Por lo tanto, si l es la medida del lado del cuadrado, dicha altura es $h = l\sqrt{2}/2$. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} &(ABE) = (ABCE) \\ \Rightarrow &\frac{BE \cdot h}{2} = l^2 \\ \Rightarrow &\frac{4\sqrt{2} \cdot l\sqrt{2}}{4} = l^2 \end{aligned}$$

  Por lo que $l = 2$. AsÃŋ, el Ãąrea del cuadrado es 4.

14. (IE, IIN, 2016) Considere un $\triangle ABC$ isósceles con $AB = AC$. Sea D en $\overleftrightarrow{AC}$ tal que $\overline{BD} \perp \overline{AB}$ y sea E el pie de la altura sobre $\overline{AB}$ trazada desde C. Si $m\angle BAC = 45°$ y $CE = 1$, entonces CD es

    (a) $\sqrt{2}$

    (b) $2\sqrt{2}$

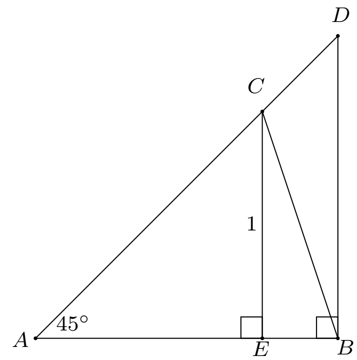
    (c) $2 - \sqrt{2}$

    (d) $4 - \sqrt{2}$

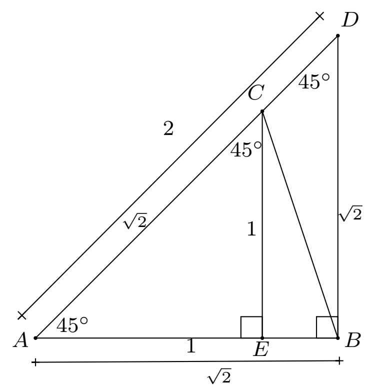
- OpciÃşn correcta: c)

- SoluciÃşn:

De acuerdo con el enunciado tenemos lo que se muestra en la figura adjunta.
Vemos que $m\angle ACE = 45°$, por lo que el $\triangle AEC$ es isósceles y $AE = 1$.
Por el Teorema de Pitágoras, $AC = \sqrt{2} = AB$.
Como $\overline{CE} \parallel \overline{BD}$, entonces $m\angle ADB = 45°$; así, el $\triangle ABD$ es isósceles, por lo que $BD = \sqrt{2}$.
Utilizando el Teorema de Pitágoras $AD = 2$.



Finalmente, $CD = AD - AC = 2 - \sqrt{2}$.



15. (IE, IIN, 2017) Sea el $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo, con $m\angle ABC = 90°$. Sean E y F puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, respectivamente, y sea G un punto tal que $B - G - C$. Si el área del $\triangle ABC$ es 24 cm^2, entonces el área en cm^2 del $\triangle EFG$ es

   (a) 3

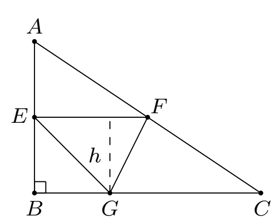
   (b) 6

   (c) 9

   (d) 12

- OpciÃşn correcta: b
- SoluciÃşn:

Considere al figura



$\overline{EF} \parallel \overline{BC}$ por ser una paralela media, entonces $h = \dfrac{AB}{2}$ y además $EF = \dfrac{BC}{2}$, así tenemos que:

$$(EFG) = \frac{1}{2} \cdot EF \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{BC}{2} \cdot \frac{AB}{2} = \frac{(ABC)}{4} = \frac{24}{4} = 6$$

16. (IE, IIN, 2017) En un paralelogramo $\square ABCD$ se tiene que $m\angle ABC = 120°$ y $2AB = BC$. Si M es el punto medio de $\overline{BC}$ y $MA = 7\sqrt{3}$, entonces la medida del lado mayor del paralelogramo es

    (a) 7

    (b) 14

    (c) $\sqrt{3}$

    (d) $7\sqrt{3}$

- Opción correcta: b

- Solución:

  Denote x: medida del lado menor del paralelogramo.

  Es decir, $AB = DC = x$. $2AB = BC$, por lo que $BC = AD = 2x$. M es el punto medio de $\overline{BC}$, por lo que $BM = MC = x$. $m\angle ABC = 120$, por lo que $m\angle BCD = 60$.

  Entonces, el $\triangle MCD$ es equilátero, $MD = x$ y $m\angle DMC = 60$. Por otra parte, el $\triangle ABM$ es isósceles y $m\angle AMB = 30$. $m\angle AMD = 180 - m\angle AMB - m\angle DMC = 180 - 30 - 60 = 90$.

  Finalmente, el $\triangle AMD$ es rectángulo en M, aplicando el Teorema de Pitágoras $(2x)^2 - x^2 = (7\sqrt{3})^2$, $x = 7$ y el lado mayor del paralelogramo mide $2x = 14$.

17. (IE, IIN, 2018) Considere los puntos A, B, P y Q tales que $\overline{AB} \parallel \overline{PQ}$, $\overline{AP} \perp \overline{BA}$. Si ademÃąs se cumple que $PQ = \frac{AB}{3}$ y que $AP = AB$, entonces la razÃşn entre las Ãąreas de los triÃąngulos $\triangle ABP$ y $\triangle BPQ$ es

    (a) $\frac{1}{3}$

    (b) 1

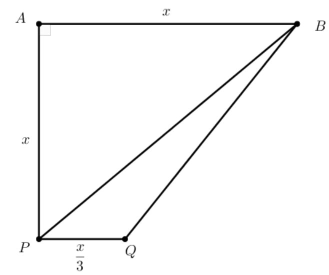
    (c) $\frac{3}{2}$

    (d) 3

- OpciÃşn correcta: (d)

- SoluciÃşn:

De acuerdo con la informaciÃşn dada, se tiene la siguiente figura:



Entonces, $\dfrac{(ABP)}{(BPQ)} = \dfrac{\dfrac{x \cdot x}{2}}{\dfrac{x/3 \cdot x}{2}} = \dfrac{\dfrac{x^2}{2}}{\dfrac{x^2}{6}} = 3.$

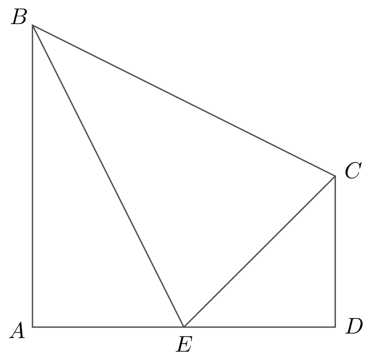
18. (IE, IIN, 2018) Considere la figura adjunta. Si E es el punto medio de $\overline{AD}$, $m\angle BAD = m\angle CDA = 90°$, $AD = AB = x$ y $\triangle EDC$ es isósceles, entonces el Ãąrea de $\triangle EBC$ es

(a) $\dfrac{5x^2}{8}$

(b) $\dfrac{5x^2}{4}$

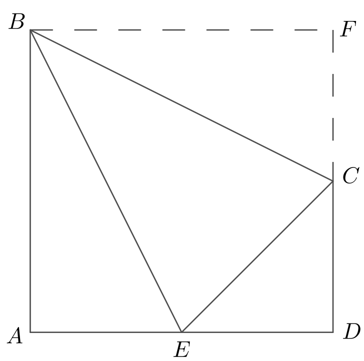
(c) $\dfrac{3x^2}{8}$

(d) $\dfrac{x^2}{8}$



- OpciÃşn correcta: (c)
- SoluciÃşn:

Consideremos la siguiente figura



Sea $AD = AB = x$. Como E es el punto medio de AD entonces $AE = ED = \dfrac{x}{2}$. Luego,

$(ABE) = \dfrac{\dfrac{x}{2} \cdot x}{2} = \dfrac{x^2}{4}$, $(BFC) = \dfrac{\dfrac{x}{2} \cdot x}{2} = \dfrac{x^2}{4}$ y $(EDC) = \dfrac{\dfrac{x}{2} \cdot \dfrac{x}{2}}{2} = \dfrac{x^2}{8}$

Por otra parte, $(ABFD) = x^2$

AsÃŋ, $(EBC) = x^2 - \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{x^2}{8} = \dfrac{3x^2}{8}$.