OLIMPIADAS COSTARRICENSES DE MATEMÁTICA
CAPACITACIÓN I ELIMINATORIA
II NIVEL. TEMA: Teoría de números

Enunciados y soluciones de los problemas

1. (IE, NB, 2010) El dígito de las unidades del producto de seis números naturales consecutivos es el siguiente:

   a) 0

   b) 2

   c) 7

   d) 8

   Solución
   Propiedad: El producto de n enteros consecutivos es divisible por $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n$.
   Si n es el producto de los 6 números naturales consecutivos, entonces es divisible por $1{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}4{\cdot}5{\cdot}6 = 720$ por lo que $n = 720a = 10 \cdot 72a$ y así el dígito de las unidades de n es cero.

2. (IE, NB, 2009) ¿Cuál es el mayor entero que divide a la suma de los cuadrados de cualesquiera tres pares consecutivos?

   a) 1

   b) 2

   c) 3

   d) 4

   Solución
   Llamemos a los tres pares consecutivos $2n-2$, $2n$ y $2n+2$. Tenemos:

$$\begin{aligned}(2n-2)^2+(2n)^2+(2n+2)^2 &= (4n^2-8n+4)+4n^2+(4n^2+8n+4)\\ &= 12n^2+8\\ &= 4(3n^2+2)\end{aligned}$$

Por lo tanto el mayor número que divide a la suma de los cuadrados de tres pares de consecutivos es 4.

3. (IE, NB, 2011) El dígito de la expansión desimal de $\frac{2}{7}$ que se ubica en la posición 2011 corresponde a

   a) 2

   b) 4

   c) 5

   d) 7

   Solución
   $\frac{2}{7} = 0,\overline{285714}$ por lo que la expansión decimal consta de 6 dígitos. Al dividir 2011 entre 6 el residuo es 1, esto es, el dígito que se encuentra en la posición uno es el 2.

4. (IE, IIN, 2015) En el planeta Orion el año dura lo mismo que en el nuestro, los días de la semana son los mismos pero no hay meses y las fechas son números desde 1 hasta 365. Así, el 1 de enero es el día 1 y el 31 de diciembre el es día 365. Siete extraterrestres cumplen años en días de la semana diferentes. Si se suman las fechas de los cumpleaños, el residuo de dividir la suma por 7 es

   a) 0

   b) 1

   c) 3

   d) 6

   Solución
   Como cada día del año es un día de la semana y la semana tiene 7 días, por el algoritmo de la división al ser cada día un número del 1 al 365, se puede expresar de la forma $7p+r$ con $0 \leq r < 7$. Así, al cumplir cada extraterrestre en un día distinto se tienen las formas $7q_0, 7q_1+1, 7q_2+2, 7q_3+3$,$7q_4+4, 7q_5+5$ y $7q_6+6$. Por lo tanto, la suma es $7(q_0+q_1+q_2+q_3+q_4+q_5+q_6)+21 = 7k$ con k entero, por lo que es múltiplo de 7 y su residuo es 0.

5. (IE, IIN, 2013) Si a, b y c son dígitos y conociendo que $a+b+c = 21$. Entonces el valor de la suma de los siguientes números de tres cifras $abc + bca + cab$ corresponde a

   a) 63

b) 1234

c) 2013

d) 2331

Solución
Utilizando la notación desarrollada se tiene que
$abc + bca + cab = (a100 + b10 + c) + (b100 + c10 + a) + (c100 + a10 + b)$
$= (a100 + b100 + c100) + (b10 + c10 + a10) + (c + a + b)$
$= (a + b + c)100 + (b + c + a)10 + (c + a + b)$
$= 21 \cdot 100 + 21 \cdot 10 + 21 = 2100 + 210 + 21 = 2331$
También se puede resolver este ejemplo con la notación habitual de suma de la siguiente manera:

$$\begin{array}{cccc} & a & b & c \\ & b & c & a \\ + & c & a & b \\ \hline 2 & 3 & 3 & 1 \end{array}$$

6. (IE, NB, 2009) Un número de dos cifras es sumado al número que se obtiene invirtiendo sus cifras. Si se divide la suma obtenida por la suma de las cifras del número dado y se eleva al cuadrado el resultado.
¿Qué número se obtiene?

a) 22

b) 100

c) 121

d) 484

Solución
El número original se puede expresar utilizando la notación desarrollada de la siguiente manera $10x + y$. De la misma manera el número invertido se expresa así $10y + x$.
Aplicando la operación solicitada se tiene:

$$\left(\frac{10x + y + 10y + x}{x + y}\right)^2 = \left(\frac{11x + 11y}{x + y}\right)^2 = \left(\frac{11(x + y)}{x + y}\right)^2 = 11^2 = 121$$

7. (IE, IIN, 2013) La cantidad de números de 5 dígitos de la forma $42x4y$, en donde x representa el dígito de las centenas y y es el dígito de las unidades, que son divisibles por $3, 4$ y 5 corresponde a

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

Solución
Para que un número sea divisible por 5 debe terminar en 5 o en 0. Sin embargo, si un número termina en 5 no es divisible por 4. Por lo tanto $y = 0$.
Para que un número sea divisible por 3, la suma de sus dígitos debe ser múltiplo de 3. De esta manera $4 + 2 + x + 4 + 0 = 3k$, es decir, $10 + x = 3k$.
Como x puede tomar valores entre 0 y 9, se tiene que $3k$ debe ser un número entre 10 y 19.
En este conjunto los múltiplos de 3 son: $12, 15, 18$. De ahí que x puede ser $2, 5$ y 8. Por lo tanto, existen 3 números.

8. (IE, NB, 2011) La cantidad de números enteros positivos de cuatro dígitos que son divisibles entre 11 de modo que la primera cifra corresponda a la suma de las cifras de las unidades y decenas y la segunda cifra a la diferencia de la cifra de la decenas y de las unidades es

   a) 0

   b) 2

   c) 4

   d) 8

   Solución
   Considere un número de 4 cifras $n = abcd$. Se tiene que $a = c + d$ y $b = c - d$. Para que n sea divisible por 11 se debe cumplir que la expresión $(a + c) - (b + d)$ tiene que ser múltiplo de 11, y sustituyendo $(a + c) - (b + d) = (c + d + c) - (c - d + d) = c + d$.
   Para que $c + d$ sea múltiplo de 11 debe cumplirse $c + d = 0$ ó $c + d = 11$, pues son cifras.
   El primer caso se descarta pues llevaría a $c = d = a = b = 0$.
   El segundo caso también debe descartarse, pues como $c + d = a$, entonces $a = 11$ lo cual no es posible pues es un dígito. Así, no existen números que cumplan las condiciones.

9. (IE, NB, 2010) El cociente que se obtiene al dividir el mínimo común múltiplo de los primeros 40 números enteros positivos por el mínimo común múltiplo de los primeros 30 números enteros positivos corresponde a:

   a) 1147

   b) 2294

c) 6882

d) 44733

Solución
Como los primeros 40 números enteros positivos contienen los primeros 30 números enteros positivos, el mcm múltiplo de los primeros 40 es múltiplo de los primeros 30. Sea x el mínimo común múltiplo de los primeros 30 números enteros positivos. Como las únicas potencias de números primos (con exponente entero), que se encuentran entre 30 y 40 son $31 = 31^1, 32 = 2^5$ y $37 = 37^1$, el mínimo común múltiplo de los primeros 40 números enteros positivos es $x \cdot 31 \cdot 2 \cdot 37 = 2294x$ y claramente el cociente que se obtiene al dividir el mínimo común múltiplo de los primeros 40 números enteros positivos por el mínimo común múltiplo de los primeros 30 números enteros positivos corresponde a 2294.

10. (IE, NB, 2010) La cantidad de números primos de la forma $\dfrac{p^2-1}{p+1}$ tales que p es un número primo, corresponde a:

    a) 0

    b) 1

    c) 2

    d) 3

    Solución
    $\dfrac{p^2-1}{p+1} = \dfrac{(p-1)(p+1)}{p+1} = p-1$. Observe que si p es 2 entonces $p-1=1$ que no es primo y si p es mayor que 3 como la suma o diferencia de impares es un número par entonces $p-1$ es par. Así, es primo solo si $p=3$ pues $p-1=2$ y 2 es el único primo par.

11. (IE, IIN, 2015) El número entero positivo n es tal que la suma de los cuadrados de sus dígitos es 50 y cada dígito es mayor que el dígito a su izquierda. El producto de los dígitos del menor n que es un número compuesto corresponde a

    a) 7

    b) 25

    c) 36

    d) 48

Solución
Los cuadrados de los posibles dígitos que suman 50 son $1, 4, 9, 16, 25, 36$ y 49, de los cuales suman 50 los siguientes $1 + 49$, $25 + 25$, $9 + 16 + 25$ y $1 + 4 + 9 + 36$. Así, los números según la otra condición de los dígitos son 17, 345 y 1236, de donde el producto de los dígitos del menor número compuesto es $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$.

12. (IE, NC, 2011) La cantidad de números enteros positivos de dos dígitos que tiene 12 divisores positivos es

    a) 4
    b) 5
    c) 6
    d) 7

    Solución
    Si el número n se descompone en factores primos $n = p_1^{a1} \cdot p_2^{a2} \cdot ... \cdot p_k^{ak}$ el número de divisores está dado por $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdot ... \cdot (a_k + 1)$.
    Como $10 \leq n \leq 100$, entonces no puede tener más de tres factores primos distintos, $n = p_1^{a1} \cdot p_2^{a2} \cdot p_3^{a3}$, con $(a_1 + 1) \cdot (a_2 + 1) \cdot (a_3 + 1) = 12$.
    Como $12 = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 6 \cdot 2 \cdot 1 = 12 \cdot 1 \cdot 1$ se puede tener los casos:
    $a_1 = 2, a_2 = 1, a_3 = 1; a_1 = 3, a_2 = 2, a_3 = 0; a_1 = 5, a_2 = 1, a_3 = 0; a_1 = 11, a_2 = 0, a_3 = 0$.
    El último se debe descartar pues ningún número $n = p^{12}$ es menor que 100.

    Caso I:$(a_1 = 2), (a_2 = 1), (a_3 = 1)$ Se puede tener

    - $n = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$
    - $n = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$
    - $n = 3^2 \cdot 2 \cdot 5 = 90$

    Caso II:$(a_1 = 3), (a_2 = 2), (a_3 = 0)$
    Se tiene

    - $n = 2^3 \cdot 3^2 = 72$

    Caso III:$(a_1 = 5), (a_2 = 1), (a_3 = 0)$
    Se tiene

    - $n = 2^5 \cdot 3 = 96$.

    Por lo tanto, hay 5 números que cumplen la condición.

13. (IE, IIN, 2018) La cantidad de números de tres cifras que son cuadrados perfectos y múltiplos de 6 es

    (a) 3
    (b) 4

(c) 6

(d) 7

Solución

Los cuadrados perfectos de 3 cifras corresponden a los cuadrados de 10 hasta 31. Para que sean múltiplos de 6, sus bases deben serlo. Los únicos que cumplen esto son 12, 18, 24 y 30, por lo que solamente hay 4 números que satisfacen lo pedido La respuesta correcta es la opción (b).

14. (IE, IIN, 2014) Al dividir dos números el cociente es 3 y el residuo es 7. Si la diferencia entre los números es 257, entonces el mayor de los números es

    a) 368

    b) 375

    c) 382

    d) 771

    Solución
    Sean a y b los números, $a > b$. El sistema de ecuaciones lineales que resuelve el problema es el siguiente:

    $$\begin{cases} \text{a} = 3b + 7 & (1) \\ \text{a - b} = 257 & (2) \end{cases}$$

    Sustituyendo (1) en (2) se obtiene:

    $3b + 7 - b = 257$
    $\Rightarrow b = 125$
    $\Rightarrow a = 3 \cdot 125 + 7 = 382.$

15. (IE, NC, 2012) La cantidad de números naturales de tres o cuatro cifras que tienen exactamente tres divisores positivos es la siguiente

    a) 17

    b) 19

    c) 21

    d) 23

    Solución
    Un número que tiene exactamente tres divisores debe ser el cuadrado de un número primo, y si tiene tres o cuatro cifras debe ser el cuadrado de un número primo mayor que 10 y menor que 100.

El problema entonces se reduce a contar los números primos desde el 11 hasta el 97: son 21 en total: 11,13,17,17,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67,71,73,79,83,89 y 97.

16. (IE, IIIN, 2015) El mayor entero que siempre divide a la expresión $n(n^2-1)$, donde n es impar, corresponde a

    a) 6
    b) 12
    c) 24
    d) 48

    Solución
    $n(n^2-1) = n(n-1)(n+1) = (n-1)n(n+1)$, que es divisible por $1\cdot 2\cdot 3 = 6$, es decir, $6|n(n^2-1)$.
    Por otra parte, como n es impar, entonces $n = 2k+1$ con k entero.
    $\Rightarrow (2k+1-1)(2k+1)(2k+1+1) = 2k(2k+1)(2k+2) = 2k(2k+1)2(k+1) = 4(2k+1)k(k+1)$
    Como $k(k+1)$ es divisible por $1\cdot 2 = 2$ entonces $k(k+1) = 2r$ con r entero, es decir,
    $4(2k+1)k(k+1) = 4(2k+1)2r = 8r(2k+1) \Rightarrow 8|n(n^2-1)$.
    Así, por definición de mínimo común múltiplo $[6,8] = 24|n(n^2-1)$.

17. (IE, IIIN, 2013) Si un número primo q satisface que $q = p^4 + 3p^2 + 2$ en donde p es un número natural, entonces se puede afirmar que el valor de 2013^{q-1} corresponde a

    a) 0
    b) 1
    c) 2013
    d) 2013^{-1}

    Solución
    Observe que $q = p^4+3p^2+2 = (p^2+1)(p^2+2)$ así que tenemos solo dos casos, que $p^2+1 = 1$ por lo tanto $p = 0$ o que $p^2+2 = 1$ donde no existe p. Por lo tanto $q = 2$ y con esto $2013^{q-1} = 2013$.

18. (IE, IIN, 2015) Sean a, b, c, d y e números naturales consecutivos cuya suma es un cubo perfecto y $b+c+d$ es cuadrado perfecto. La suma de las cifras del menor c es

    a) 17
    b) 18
    c) 19
    d) 20

    Solución
    Sean $c-1, c-2, c, c+1, c+2$ los cinco consecutivos. Entonces $c-1+c-2+c+c+1+c+2 = m^3$ con m entero $\Rightarrow 5c = m^3$
    $c-1+c+c+1 = n^2$ con n entero $\Rightarrow 3c = n^2$
    Así, para que se cumpla, la descomposición canónica de c es $3^\alpha 5^\beta$ y el menor valor de c se obtiene cuando $\alpha = 3$ y $\beta = 2$. Por lo tanto, $c = 3^3 \cdot 5^2 = 675$ y la suma de sus cifras es 18.