OLIMPIADAS COSTARRICENSES DE MATEMÁTICA CAPACITACIÓN I ELIMINATORIA

I NIVEL. TEMA: Geometría



Enunciados de los problemas

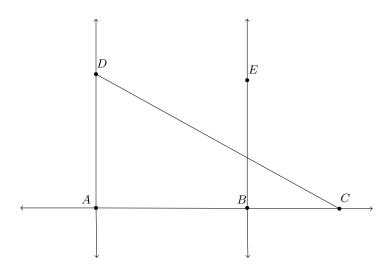
- 1. (IE, IN, 2013) Considere tres puntos colineales A, B y C y dos puntos D, E tales que \overrightarrow{AD} y \overrightarrow{BE} son perpendiculares a \overrightarrow{AB} . Analice las siguientes proposiciones:
 - I. Si B está entre A y C, entonces \overline{CD} interseca a \overline{AB}
 - II. Si C está entre A y B, entonces \overline{CE} interseca a \overline{DB}

De ellas, son siempre verdaderas

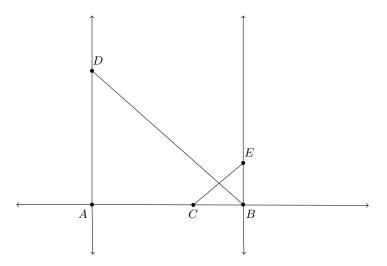
- (a) Solamente II
- (b) Solamente I
- (c) Ninguna
- (d) Ambas

Solución

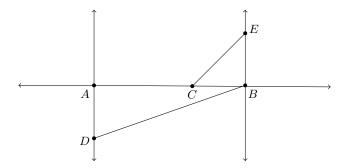
Observe que la proposición I nunca es verdadera sin importar en qué semiplano se encuentre D con respecto a \overrightarrow{AB} , ya que los puntos A, D, C forman un triángulo y el segmento \overline{AB} es parte del lado \overline{AC} (el punto E no se menciona en esta proposición)



Por su parte, la proposición II es verdadera en caso de que D y E estén en el mismo semiplano con respecto a \overrightarrow{AB} , como en la siguiente figura:



Sin embargo **no puede asegurarse que esto ocurra siempre**, pues si D y E están en distintos semiplanos con respecto a \overrightarrow{AB} , entonces los segmentos no se intersecan, tal como se muestra en la siguiente figura:



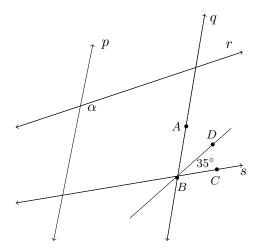
Comentario: Es importante notar que en este ejercicio se debe manejar bien la notación, para interpretar adecuadamente el enunciado, así como el concepto de perpendicularidad. Además se deben considerar todos los casos posibles para comprobar si la proposición es verdadera siempre o solamente en algunos casos.

2. (IE, IN, 2014) Si p||q, r||s y \overleftrightarrow{BD} es una bisectriz del $\angle ABC$ entonces la medida del ángulo α es





- (c) 110°
- (d) 145°

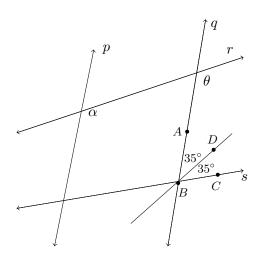


Solución

Debido a que \overleftrightarrow{BD} es bisectriz del $\angle ABC$ (lo divide en dos ángulos congruentes), entonces $\angle ABD$ también mide 35° (igual que el $\angle DBC$ indicado en la figura del enunciado). Esto quiere decir que el ángulo completo $\angle ABC$ mide 70°.

Por otra parte observe que los ángulos $\angle ABC$ y $\angle \theta$ son conjugados (considerando las paralelas r y s, y a la recta q como transversal), por lo que son suplementarios (suman 180°), de donde se obtiene que $m\angle \theta=110^\circ$

Finalmente, $\angle \theta$ y $\angle \alpha$ son correspondientes (considerando las paralelas p y q, y a la recta r como transversal), por lo que son congruentes ($\angle \alpha \cong \angle \theta$), es decir tienen la misma medida. Por lo tanto $m\angle \alpha = 110^{\circ}$

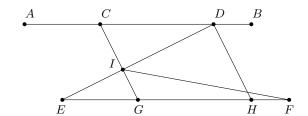


Comentario: Observe que, como hay dos parejas de rectas paralelas, los ángulos que se forman entre ellas se pueden clasificar desde distintos puntos de vista, ya sea considerando las paralelas r y s ó a las rectas p y q. también es importante observar las diferentes notaciones para los ángulos: utilizando tres puntos ($\angle ABC$, siempre colocando el vértice en el centro), usando letras griegas ($\angle \theta$, $\angle \alpha$) o utilizando números como se hizo en la explicación previa al ejemplo.

3. (IE,IN,2013) En la figura, el $\Box CDHG$ es a un paralelogramo. Además la $m\angle DHF=120^\circ$ y $m\angle CDI=30^\circ.$

Entonces con certeza se cumple:

- (a) el $\triangle IEF$ es acutángulo
- (b) el $\triangle IEF$ es rectángulo
- (c) $m \angle DCG = 60^{\circ}$
- (d) $m \angle DIG = 120^{\circ}$

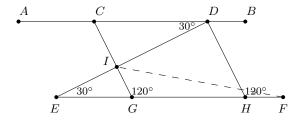


Solución

Vamos a obtener información sobre $\triangle IEF$, para lo cual necesitamos información sobre sus ángulos internos.

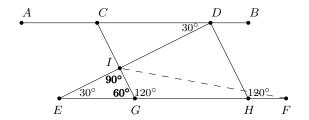
Como $\Box CDHG$ es un paralelogramo, los segmentos \overline{AB} y \overline{EF} son paralelos, entonces los ángulos $\angle CDI$ y $\angle GEI$ son congruentes por ser alternos internos entre paralelas, es decir, $m\angle GEI = 30^{\circ}$

De igual forma los segmentos \overline{CG} y \overline{DH} son paralelos, entonces los ángulos $\angle DHF$ y $\angle IGH$ son congruentes por ser correspondientes, entonces $m\angle IGH=120^\circ$



Por otra parte, $\angle EGI$ y $\angle IGH$ son suplementarios, por lo que $m\angle EGI + m\angle IGH = 180^\circ$ y como $m\angle CGH = 120^\circ$ entonces se tiene que $m\angle EGI = 60^\circ$

Ahora, $m\angle EGI + m\angle GEI + m\angle EIG = 180^\circ$ pues son los ángulos internos de un triángulo, y como ya sabemos que $m\angle EGI = 60^\circ$ y $m\angle GEI = 30^\circ$ entonces $m\angle EIG = 90^\circ$

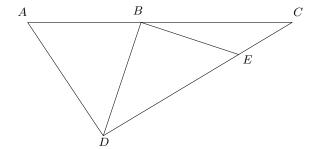


Además $m\angle EIF = m\angle EIG + m\angle GIF$ y como acabamos de encontrar que $m\angle EIG = 90^\circ$ entonces $m\angle EIF > 90^\circ$. Por lo tanto, $\triangle IEF$ es obtusángulo, con lo cual se concluye que las proposiciones a) y b) son falsas.

Por otra parte, $m\angle EIG = m\angle CID$ por ser opuestos por el vértice. Entonces en $\triangle CDI$ tenemos que $m\angle CID = 90^\circ$ y $m\angle CDI = 30^\circ$, por lo tanto $m\angle DCI = 60^\circ$ pues la suma de los ángulos internos del triángulo es 180°. Observe finalmente que $\angle DCI$ es el mismo $\angle DCG$, por lo que la respuesta correcta es la opción C.

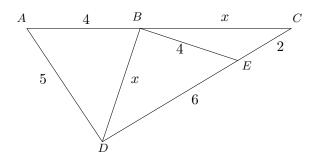
Comentario: Observe que se están utilizando una gran cantidad de conceptos sobre ángulos, como adyacentes, opuestos por el vértice, correspondientes, alternos internos, por lo que se requiere un manejo adecuado de estas clasificaciones de ángulos. Observe también que la opción D es falsa, pues $\angle DIG$ y $\angle EIG$ son adyacentes (y por lo tanto suplementarios) y como $m\angle EIG = 90^\circ$ entonces $\angle DIG$ también debe medir 90°

- 4. (IE, IN, 2014) En la figura adjunta, si AB=4, AD=5, DE=6, EC=2, BE=4 y BD=BC. ¿Cuántos números enteros corresponden a las medidas de \overline{BD} ?
 - (a) 1
 - (b) 2
 - (c) 3
 - (d) 4



Solución

Llamemos x a la medida de \overline{BD} y coloquemos los datos del enunciado en la siguiente figura



Por la Desigualdad Triangular podemos afirmar lo siguiente:

En el $\triangle ABD$ se tiene que x+4>5 y 4+5>x, es decir, x>1 y 9>x, lo cual se puede resumir en una sola expresión 1< x<9 (1)

En el $\triangle DBE \ x + 4 > 6 \ y \ 4 + 6 > x$, es decir, $x > 2 \ y \ 10 > x$, de donde 2 < x < 10 (2)

En el $\triangle BEC$ x + 2 > 4 y 4 + 2 > x, es decir, x > 2 y 6 > x, de donde 2 < x < 6 (3)

En el $\triangle ADC$ y 8+5 > 4+x, 5+4+x > 8 es decir, 9 > x y x > 0, de donde 0 < x < 9 (4)

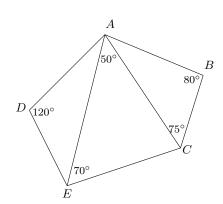
En el $\triangle BDC$ y 2x > 8, de donde x > 4 (5)

Como x debe cumplir todas las desigualdades (1), (2), (3), (4), (5) se tiene que 4 < x < 6, y como además debe ser un número entero, entonces solamente podría tomar el valor 5. Es decir, existe un solo número entero que puede corresponder a la medida de \overline{BD} .

5. (IE, IN, 2013) De acuerdo con la información que se proporciona en la siguiente figura, el segmento de mayor longitud es



- (b) \overline{AD}
- (c) \overline{AB}
- (d) \overline{AC}



Solución

Para el triángulo obtusángulo $\triangle ADE$ se tiene que el segmento de mayor longitud es \overline{AE} , pues es el que se opone al ángulo mayor (los otros dos ángulos son agudos y por lo tanto de menor

medida que el obtuso).

Por otra parte, en el $\triangle AEC$ observe que $m \angle ACE = 60^{\circ}$, pues los otros dos ángulos internos miden 50° y 70° y la suma de los tres debe ser 180° . Entonces, en este triángulo el segmento de mayor longitud es \overline{AC} , pues se opone al ángulo mayor.

Lo mismo se puede afirmar en el $\triangle ABC$, pues se puede obtener que $m \angle BAC = 25^{\circ}$, por lo que \overline{AC} se opone al ángulo mayor de este triángulo.

Por lo tanto la respuesta correcta es la opción D.

- 6. (IE, NA, 2012) Considere un triángulo isósceles, tal que dos de sus ángulos internos están en relación 1:4, entonces se puede asegurar que dicho triángulo podría ser
 - (a) solamente acutángulo
 - (b) solamente rectángulo
 - (c) solamente obtusángulo
 - (d) obtusángulo o acutángulo

Solución

Como se indica que el triángulo es isósceles, tiene dos ángulos de igual medida. Además debe considerarse que dos de sus ángulos internos están en relación 1:4, es decir, que si uno tiene medida α el otro mide 4α .

Se tiene dos opciones:

- I. Los dos ángulos congruentes midan α , en cuyo caso las medidas de los tres ángulos serán α , α , 4α
- II. Los dos ángulos congruentes midan 4α , en cuyo caso las medidas de los tres ángulos serán α , 4α , 4α

Como la suma de los ángulos internos debe ser 180°, entonces se tiene las siguientes opciones:

I Caso:

$$\begin{array}{lll} \alpha + \alpha + 4\alpha = 180^{\circ} & \Rightarrow & 6\alpha = 180^{\circ} \\ & \Rightarrow & \alpha = 30^{\circ} \\ & \Rightarrow & \text{las medidas de los ángulos son } 30^{\circ}, \, 30^{\circ}, \, 120^{\circ} \end{array}$$

II Caso:

$$\begin{array}{lll} \alpha+4\alpha+4\alpha=180^{\circ} & \Rightarrow & 9\alpha=180^{\circ} \\ & \Rightarrow & \alpha=20^{\circ} \\ & \Rightarrow & \text{las medidas de los ángulos son } 20^{\circ}, \, 80^{\circ}, \, 80^{\circ} \end{array}$$

Por lo tanto el triángulo podría ser obtusángulo o acutángulo.

- 7. (IE, IN, 2015) En el triángulo equilátero $\triangle ABC$, sean M y N los puntos medios de \overline{AB} y \overline{BC} respectivamente. Sea P el pie de la perpendicular sobre \overline{AC} desde M. Si se traza una recta paralela a \overrightarrow{AB} por P y llamamos Q al punto de intersección de esta recta con \overline{MN} , entonces $m\angle PQN$ es
 - (a) 60°
 - (b) 105°
 - (c) 120°
 - (d) 135°

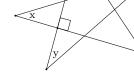
Solución

Con la información del enunciado se puede construir la siguiente figura:

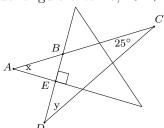
8. (IE, IN, 2016) De acuerdo con los datos de la figura, el valor de x+y es



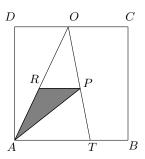
- (b) 50°
- (c) 65°
- (d) 90°



- Opción correcta: c)
- Solución: En $\triangle ABE$, $m\angle ABE = 90^{\circ} x$. Entonces, en $\triangle BCD$, por el teorema de la medida del ángulo externo, $25^{\circ} + y = 90^{\circ} x$ de donde $x + y = 90^{\circ} 25^{\circ} = 65^{\circ}$.



9. (IE, NA, 2010) En la siguiente figura se muestra el cuadrado $\Box ABCD$ de lado 4cm. Sea O es el punto medio de \overline{DC} , R es el punto medio de \overline{AO} , T es tal que 3TB = AT y P es el punto medio de \overline{OT}



Entonces el área, en centímetros cuadrados, de la parte sombreada corresponde a

- (a) $\frac{1}{2}$
- (b) 1
- (c) 2
- (d) $\frac{3}{2}$

Solución

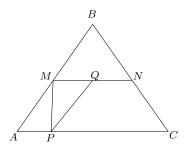
Se indica que cada lado del cuadrado ABCD mide 4 unidades, es decir, AB=4. Además se observa en la figura que AT+TB=AB=4 y como AT=3TB entonces se tiene 3TB+TB=4, es decir, TB=1 y AT=3.

Por otro lado, observe que RP es paralela media del $\triangle AOT$, pues R y P son los puntos medios de \overline{AO} y \overline{OT} , entonces RP mide la mitad de AT, de donde $RP=\frac{3}{2}$.

Podemos calcular el área sombreada como el área del $\triangle ARP$, utilizando el lado \overrightarrow{RP} como base. Veamos que la altura h de este triángulo es la distancia desde A hasta la recta \overrightarrow{RP} , pero como RP es paralela media del $\triangle AOT$, entonces dicha recta divide el cuadrado a la mitad, es decir, la altura mide la mitad del lado del cuadrado.

Entonces el área sombreada es
$$A = \frac{base \times altura}{2} = \frac{\frac{3}{2} \times 2}{2} = \frac{3}{2}$$

Comentario: Observe como se utilizó la fórmula para el área del triángulo pero tomando la base de manera adecuada. Cualquiera de los tres lados de un triángulo puede funcionar como base siempre y cuando sea posible averiguar su medida y la medida de la altura sobre ese lado. Otro de los conceptos utilizados en este ejercicio fue el de la Paralela Media de un triángulo: El segmento que une los puntos medios de los lados de un triángulo es paralelo a tercer lado y su longitud es la mitad de ese tercer lado.



En $\triangle AMP$, $m\angle MAP=60^\circ$, por ser uno de los ángulos del triángulo equilátero y $m\angle APM=90^\circ$, por ser el pie de la perpendicular. Como la suma de los ángulos internos debe ser 180° , se tiene que $m\angle AMP=30^\circ$.

Por otra parte $\overleftrightarrow{AM} \parallel \overleftrightarrow{PQ}$, por lo que $\angle AMP \cong \angle MPQ$ por ser alternos internos entre paralelas. Entonces $m\angle MPQ = 30^{\circ}$.

Además $m\angle PMQ=90^\circ$. Entonces, por el teorema de la medida del ángulo externo, $m\angle PQN=m\angle PMQ+m\angle MPQ=90^\circ+30^\circ=120^\circ$

Por lo tanto, la respuesta correcta es la opión c).

Comentario:

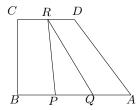
Observe que una de las principales dificultades de este ejercicio es que el enunciado no da la figura, sino que da una descripción y con base en esto debemos construirla.

Note también que este ejemplo está en la sección de clasificación de triángulos, sin embargo lo único que se utiliza de este tema es que cada ángulo interno mide 60°, pero se utilizan muchos conceptos más, como el teorema de la medida del ángulo externo de un triángulo, la suma de los ángulos internos, la clasificación de ángulos formaos por dos rectas paralelas y una transversal. Con esto se quiere hacer énfasis en que no deben verse los temas de forma aislada, sino como algo general e integrados entre sí

- 10. (IE, IN, 2015) Considere que $\Box ABCD$ es un trapecio rectángulo con base mayor \overline{AB} , recto en B, cuya base menor mide la mitad de la base mayor. Sean P y Q puntos en \overline{AB} tales que BP = PQ = QA y R en \overline{CD} . Se puede afirmar que $\frac{(ABCD)}{(PQR)}$ es
 - (a) $\frac{9}{4}$
 - (b) $\frac{1}{4}$
 - (c) $\frac{10}{3}$
 - (d) $\frac{9}{2}$

Solución

Respuesta correcta: opción d.



Como BP = PQ = QA, se tiene que AB = 3PQ.

Llamemos PQ=b, por lo que AB=3b y $CD=\frac{3b}{2},$ además llamemos h a la altura del trapecio.

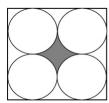
Entonces las áreas buscadas se pueden expresar en térmnos de b y h de la siguiente forma

$$(ABCD) = \frac{(3b + \frac{3b}{2})h}{2} = \frac{9bh}{4} \text{ y } (PQR) = \frac{bh}{2}$$

Por lo que

$$\frac{(ABCD)}{(PQR)} = \frac{9bh}{4} \div \frac{bh}{2} = \frac{9}{2}$$

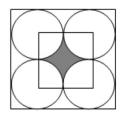
- 11. (IE, IIN, 2013) El área sombreada con gris en centímetros cuadrados de la figura adjunta, que representa cuatro círculos inscritos en un cuadrado cuya área es de $64cm^2$ corresponde a
 - (a) 16π
 - (b) $32 4\pi$
 - (c) $64 4\pi$
 - (d) $16 4\pi$



Solución

Como se indica que el área del cuadrado es $64cm^2$ y sabemos que el área del cuadrado se calcula multiplicando lado por lado, entonces el lado del cuadrado mide 8cm. Además, dos diámetros de los círculos miden lo mismo que el lado del cuadrado, por lo que cada diámetro mide 4cm, es decir, cada radio mide 2cm.

Por otra parte, observe que si se unen los centros de los cuatro círculos se forma un cuadrado cuyo lado mide 4cm, pues el lado de este cuadrado está formado por dos radios.



Pero también se puede observar que dentro de este cuadrado pequeño se encuentran cuatro cuadrantes de círculo, que tienen un área equivalente al de un solo círculo. Es decir que el área sombreada equivale al de la siguiente figura, en la cual se reacomodaron los cuatro cuadrantes para formar un solo círculo.

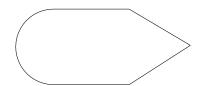


Entones el área sombreada se puede calcular restando al área del cuadrado de lado 4cm el área del círculo de radio 2cm.

Área sombreada = área del cuadrado - área del círculo = $lado \times lado - \pi r^2$ = $4 \times 4 - \pi (2)^2$ = $64 - 4\pi$

Comentario: Se debe notar que lo importante en este ejercicio fue las diferentes formas en que se observó el área sombreada, para reacomodarla de una manera más adecuada.

12. (IE, NA, 2008) Se desea cercar un terreno como el que se muestra en la figura, formado por un cuadrado, un semicírculo y un triángulo equilátero. Si el lado del triángulo mide 150m, el total de metros de alambre que se necesita es



- (a) $1050 + 150\pi$
- (b) 1200
- (c) $675 + \pi$
- (d) $600 + 75\pi$

Solución

Como el triángulo es equilátero, el lado del cuadrado y el diámetro del semicírculo también miden 150m.

Note que lo que necesitamos es encontrar la medida del perímetro de la figura y éste se obtiene sumando dos de los lados del triángulo, dos de los lados del cuadrado y la medida de la semicircunferencia.

Por lo tanto, se necesitan:

 $300 + 300 + 75\pi = 600 + 75\pi$ metros de alambre.

- 13. (IE,IN, 2018) Considere el $\triangle ABC$ isósceles y acutángulo, tal que AC = BC. Si A M C, con AM = AB, y $m \angle ACB = 40^{\circ}$, entonces $m \angle MBC$ es
 - (a) 15°
 - (b) 40°
 - (c) 55°
 - (d) 70°

Solución

Como $\triangle ABC$ isósceles y acutángulo y $m \angle ACB = 40^{\circ}$, entonces $m \angle ABC = m \angle BAC = 70^{\circ}$.

Por otro lado se tiene que A-M-C con AM=AB, entonces el $\triangle ABM$ es isósceles.

Se sabe que $m \angle BAM = 70^{\circ}$, entonces $m \angle AMB = m \angle ABM = 55^{\circ}$. Como $m \angle ABC = m \angle ABM + m \angle MBC$, $70^{\circ} = 55^{\circ} + m \angle MBC$ se tiene que $m \angle MBC = 15^{\circ}$. La respuesta correcta es la opción (a).

- 14. (IE, IN, 2018) Considere el triángulo isósceles $\triangle ABC$, con AB = AC. Si M es un punto sobre \overline{BC} , tal que $\overline{AM} \perp \overline{BC}$, entonces $m \angle MAB + m \angle BCA$ es
 - (a) 120°
 - (b) 90°
 - (c) 60°
 - (d) 45°

Solución

 $m\angle ABC = m\angle BCA$ puesto que $\triangle ABC$ es isósceles, luego $\overline{AM} \perp \overline{BC}$ entonces los triángulos $\triangle AMB$ y $\triangle AMC$ son triángulos rectángulos.

Así, $m \angle MAB + m \angle ABC = 90$, luego $m \angle MAB + m \angle BCA = 90^{\circ}$. La respuesta correcta es la opción (a).

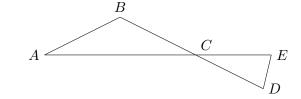
15. (IE, IE, 2018) En la figura adjunta, C es el punto de intersección de \overline{AE} y \overline{BD} , AB=BC y CE=CD. Si $m\angle CED=55^\circ$, entonces $m\angle ABC$ es

(a) 40°





(d) 80°



Solución

Como $\triangle DCE$ es isósceles, entonces $\angle CED \cong \angle CDE$.

Luego $m \angle DCE = 180^{\circ} - 55^{\circ} - 55^{\circ} = 70^{\circ}$ y, por ser opuesto por el vértice al ángulo anterior, $m \angle BCA = 70^{\circ}$.

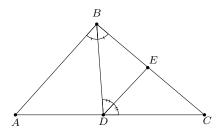
Como $\triangle ABC$ es isósceles, $m \angle BCA = m \angle BAC = 70^{\circ}$.

Por lo tanto, $m \angle ABC = 180^{\circ} - 70^{\circ} - 70^{\circ} = 40^{\circ}$. La respuesta correcta es la opción (a).

- 16. (IE, IN, 2016) Sea el $\triangle ABC$ tal que $m \angle BAC = 48^{\circ}$ y $m \angle BCA = 40^{\circ}$. Sea D un punto tal que A D C y \overline{BD} biseca al $\angle ABC$. Sea E un punto tal que B E C y \overline{DE} biseca al $\angle BDC$. Entonces $m \angle DEC$ corresponde a
 - (a) 47°
 - (b) 86°
 - (c) 92°
 - (d) 93°

Solución

Considere la figura



 $m \angle ABC = 180^{\circ} - m \angle BCA - m \angle BAC \Rightarrow m \angle ABC = 92^{\circ}$

ahora $m \angle ABD = m \angle DBC = \frac{1}{2} m \angle ABC = 46^{\circ} \ (\overline{BD} \text{ biseca } \angle ABC)$

 $m\angle DEC = m\angle BDE + m\angle EBD = m\angle BDE + 46^{\circ}$ (ángulo externo al $\triangle BDE$)

 $m\angle EDC = m\angle BDE$

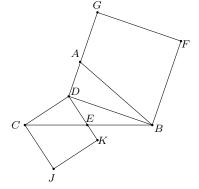
 $m\angle DEC + m\angle BCA + m\angle EDC = 180 \Rightarrow m\angle BDE + 46^{\circ} + 40^{\circ} + m\angle BDE = 180$

Así $m \angle BDE = 47^{\circ}$ y $m \angle DEC = 93^{\circ}$. La respuesta correcta es la opción (d).

17. En la figura el $\Box DBFG$ y el $\Box DKJC$ son cuadrados de áreas 16 y 9 respectivamente. Si AD=DE=2, el área del $\Box ABCD$ es 10, entonces el área del $\triangle EDB$ corresponde a



- (b) 2
- (c) 3
- (d) 4



Solución

(ABCD) = (CDE) + (ADB) + (EDB)

 $\implies 10 = (CDE) + (ADB) + (EDB)$

 $\implies 10 - (CDE) - (ADB) = (EDB)$

Ahora $\triangle CDE$ y $\triangle ADB$ son triángulos rectángulos entonces (CDE)=3 y (ADB)=4.

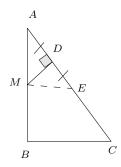
Y así (EDB) = 3. La respuesta correcta es la opción (c).

18. (IE, IN, 2016) Sea el $\triangle ABC$ recto en B, M punto medio de \overline{AB} y D, E puntos tales que A-D-E-C, AD=DE y $\overline{MD}\perp \overline{AC}$. Si $m\angle BAC=20^\circ,$ entonces la $m\angle BEC$ corresponde a

- (a) 140°
- (b) 90°
- (c) 70°
- (d) 40°

Solución

Considere la figura



Trazamos $\overline{ME},\, \triangle MDA \cong \triangle MDE(L-A-L)$ así $m \angle AEM = 20^\circ$

$$m\angle AMD = m\angle DME = 70^{\circ} \text{ y } AM = ME = MB$$

 $\triangle BME$ es isósceles con BM=MEy as
í $m\angle MEB=m\angle MBE$

 $2m \angle MEB = 140^{\circ}$ (ángulo externo) así $m \angle MEB = 70^{\circ}$

$$m \angle BEC = 180^{\circ} - m \angle MEB - m \angle MEA = 90^{\circ}$$

∴ $m \angle BEC = 90^{\circ}$. La respuesta correcta es la opción (b).