OLIMPIADAS COSTARRICENSES DE MATEMÁTICA
CAPACITACIÓN I ELIMINATORIA
I NIVEL. TEMA: Teoría de números

Enunciados de los problemas

1. (IE, IN, 2015) ¿Cuántos números impares menores a 500 al ser divididos por 3, por 4 y por 5 dejan residuo 1?

   (a) 5
   (b) 9
   (c) 36
   (d) 60

   Solución

   Si al dividir un número impar por 3, 4 y 5 deja residuo 1, entonces su antecesor debe ser múltiplo de 3, 4 y 5. Dado que 3, 4 y 5 no tienen divisores en común entonces cualquier múltiplo común a ellos debe ser un múltiplo de $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$.
   Determinemos los múltiplos pares de 60 menores a 500. Estos son: 0, 60, 120, 180, 240, 300, 360, 420, 481. Los sucesores de estos números son: 1, 61, 121, 181, 241, 301, 361, 421 y 481. Por lo tanto hay 9 números que cumplen las condiciones del problema. La opción correcta es la b.

   Un concepto relacionado al de múltiplo es el de divisor de un número entero el cual se presenta a continuación.

2. (IE, IN, 2014) ¿Cuál de las siguientes parejas de números enteros tienen más divisores en común?

   (a) 24 y 18
   (b) 56 y 98
   (c) 72 y 36
   (d) 105 y 216

   Solución

   Denotemos con D_a los divisores del número a.

   $D_{24} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$
   $D_{18} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$
   Divisores en común del 24 y 18 son $\{1, 2, 3, 6\}$

Verifique que:
Los divisores en común del 56 y 98 son $\{1, 2, 7, 14\}$
Los divisores en común del 72 y 36 son $\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 36\}$
El único divisor en común del 105 y 216 es $\{3\}$

Por lo que la pareja de números que tiene más divisores en común es 72 y 36. Opción correcta c.

En la solución del siguiente problema también se puede aplicar el concepto de divisor de un número entero.

3. (IE, IN, 2015) En un laboratorio clínico han recolectado más de 40 muestras y menos de 50. Se quieren refrigerar en recipientes de modo que en cada uno haya la misma cantidad de muestras y que todos los recipientes queden completos. Cada recipiente debe contener al menos tres muestras. Si solo puede hacerse de tres maneras, la cantidad máxima de recipientes que se necesitan es

   (a) 15
   (b) 16
   (c) 22
   (d) 23

Solución

Para resolver el ejercicio se debe encontrar un número mayor que 40 y menor que 50 que tenga exactamente tres divisores propios, es decir, sin tomar en cuenta el 1 y el mismo número como posibles divisores. Por otra parte, cada divisor propio debe ser mayor o igual a tres, esto porque el problema indica que cada recipiente debe contener almenos tres muestras. Analicemos cada número entero entre 41 y 49.

- 41 es primo. Por lo tanto no tiene divisores propios.
- 42 tiene dos divisores propios: 2 y 21.
- 43 es primo. No tiene divisores propios.
- 44 tiene tres divisores propios: 2, 4 y 11.
- 45 tiene tres divisores propios: 3, 5 y 9.
- 46 tiene dos divisores propios: 2 y 23.
- 47 es primo. No tiene divisores propios.
- 48 tiene más de tres divisores.
- 49 tiene un divisor propio.

Según la lista anterior únicamente el número 45 tiene tres divisores propios mayores o iguales a 3. Esto quiere decir que la cantidad de muestras recolectadas es de 45. Además estas pueden refrigerarse de las tres siguientes formas: (1) en 15 recipientes con tres muestras cada uno. (2) en nueve recipientes con cinco muestras cada uno y (3) en cinco recipientes con nueve muestras cada uno. Por lo tanto la cantidad máxima de recipientes que se necesitan es de 15 en el que cada uno contiene tres muestras. La respuesta correcta es la opción a.

4. (IE, IN, 2014) El dígito de las unidades del número 23^{2014} corresponde a

   (a) 1
   (b) 3
   (c) 7
   (d) 9

   <u>**Solución**</u>

   Para resolver ejercicios de este tipo se debe buscar un patrón o ciclo en la cifra de las unidades de las potencias de 23.

   Observe que el dígito de las unidades de 23^1 es 3, de 23^2 es 9, de 23^3 es 7, de 23^4 es 1 y a partir de ahí se repite un ciclo de periodo 4. Debido a esto se puede establecer una relación entre el residuo de la división del exponente de la potencia y 4. Si el residuo es 1 entonces la cifra de las unidades es 3, si el residuo es 2 entonces la cifra de las unidades es 9, si el residuo es 3 la cifra de las unidades es 7 y si el residuo es 0 la cifra de las unidades es 1. Dado que al dividir 2014 por 4 se obtiene cociente 503 y residuo 2, entonces 23^{2014} termina en 9. La opción correcta es d.

   Otro problema donde se puede aplicar el algoritmo de la división es el siguiente.

5. (IE, IN, 2015) Si la suma de tres números primos menores que 100 es 118, entonces uno de los números es

   (a) 2
   (b) 31
   (c) 61
   (d) 83

   <u>**Solución**</u>

   Si los tres números primos del problema fuesen distintos de 2, entonces su suma sería impar, esto porque la suma de tres números impares es impar. Debido a esto uno de los números dados debe ser primo par, es decir, uno de los tres números es el 2, ya que es el único primo par. Luego los otros dos números son 37 y 39. La respuesta correcta es la opción a.

6. (IE, NA, 2012)La cantidad de números primos menores que 100 tales que el mínimo común múltiplo de sus dígitos sea 6 corresponde a

   (a) 1
   (b) 2
   (c) 3
   (d) 4

   <u>**Solución**</u>

Los números de 0 a 100 que satisfacen que el mínimo común múltiplo de sus dígitos sea 6 corresponden a 66, 62, 63, 26, 36,16, 61, 23, 32. De ellos solo son primos el 61 y 23. Por lo tanto, solo dos números cumplen esta condición. La opción correcta es la b.

7. (IE, IN, 2013) El triple del producto de las edades de un padre y su hijo es 2013. Si ambos cumplen años el mismo día, entonces cuando nació el hijo la edad del padre era

   (a) 48
   (b) 49
   (c) 50
   (d) 51

   Solución

   Por el teorema fundamental de la aritmética, 2013 puede descomponerse como el producto de números primos. Al descomponer 2013 en factores primos se obtiene $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$. Esto quiere decir que 2013 se expresa de forma única como el triple producto de 11 y 13. Dado que el triple producto de las edades del padre y el hijo es 2013 se tiene que la edad del padre es 61 y la del hijo 11. Por lo tanto, la edad del padre era 50 cuando nació el hijo. La respuesta correcta es la opción c.

8. (IE, IN, 2014) ¿Cuántos posibles números de la forma $5a6b$ son divisibles por 6?, siendo a y b los dígitos de las centenas y unidades, respectivamente.

   (a) 5
   (b) 10
   (c) 16
   (d) 32

   Solución

   Según las reglas de divisibilidad descritas, el número entero $5a6b$ es divisible por seis si es divisible por dos y por tres a la vez. Analicemos cada caso por separado.

   Caso I: $5a6b$ divisible por 2.
   Según las reglas de divisibilidad, $5a6b$ es divisible por dos si la cifra de las unidades es par, esto es si $b \in \{0, 2, 3, 4, 6, 8\}$

   Caso II: $5a6b$ divisible por 3.
   Según las reglas de divisibilidad, $5a6b$ es divisible por tres si la suma de sus cifras es divisible por 3, esto es si $5 + a + 6 + b$ es divisible por tres o lo que es lo mismo si $11 + a + b$ es divisible por tres. Sustituyendo los posibles valores de b obtenidos en el caso I se obtiene:

   - Si $b = 0$ entonces $a \in \{1, 4, 7\} \Rightarrow 3$ números diferentes.
   - Si $b = 2$ entonces $a \in \{2, 5, 8\} \Rightarrow 3$ números diferentes.

- Si $b = 4$ entonces $a \in \{0, 3, 6, 9\} \Rightarrow 4$ números diferentes.
- Si $b = 6$ entonces $a \in \{1, 4, 7\} \Rightarrow 3$ números diferentes.
- Si $b = 8$ entonces $a \in \{2, 5, 8\} \Rightarrow 3$ números diferentes.

Así en total hay 16 números diferentes. La respuesta correcta es la opción c.

9. (IE, IN, 2015) Si a y b son los dígitos de las unidades de millar y decenas, respectivamente, ¿cuántos posibles números de la forma $2a9b3$ son divisibles por 11?

   (a) 2
   (b) 4
   (c) 9
   (d) 10

Solución

Según las reglas de divisibilidad descritas, un número es divisible por 11 si la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan lugares impares y la suma de las que ocupan lugares pares es divisible por 11.
En el número $2a9b3$ la suma de las cifras que ocupan lugares impares es $3+9+2 = 14$ y la suma de las que ocupan lugares pares es $b + a$.
La diferencia de la suma de las cifras que ocupan lugares impares y la suma de las que ocupan lugares pares es $14 - (a + b)$. Esta diferencia es múltiplo de 11 si y solo si $a + b = 14$ o $a + b = 3$. Recuerde que a y b solo puede tomar valores de 0 a 9 ya que corresponden a dos de los dígitos del número dado.

Para el caso en que $a + b = 14$, los posibles valores de a y b son:

- $a = 9$, $b = 5$.
- $a = 8$, $b = 6$.
- $a = 7$, $b = 7$.
- $a = 6$, $b = 8$.
- $a = 5$, $b = 9$.

Para el caso en que $a + b = 3$, los posibles valores de a y b son:

- $a = 0$, $b = 3$.
- $a = 1$, $b = 2$.
- $a = 2$, $b = 1$.
- $a = 3$, $b = 0$.

En total hay nueve posibles números de la forma $2a9b3$ que son divisibles por 11. Estos son: 29953, 28963, 27973, 26983, 25993, 20933, 21923, 22913 y 23903. Por lo tanto la respuesta correcta es la opcioń c.

10. (IE, IN, 2014) En una tubería de gas de 6km de longitud se deben hacer agujeros cada 120m para conectar con tuberías secundarias y cada 300m para instalar válvulas de control. (En caso de coincidir se pueden instalar ambas en un mismo agujero). Si el primer agujero coincide al inicio de la tubería, ¿Cuántos hoyos se requieren en total?

    (a) 60
    (b) 61
    (c) 72
    (d) 600

    Solución

    Para resolver este problema se debe determinar cada cuánto coincide un agujero. Este número coincide con el menor de los múltiplos comunes de 120 y 300, es decir, con el mínimo común múltiplo. Verfique que m.c.m.(120,300)=600. Esto significa que cada 600m coincide un agujero. Como hay un hoyo al inicio de la tubería, coinciden un total de 11 hoyos ($6000 \div 600 + 1$). Es decir, en 11 hoyos se instala una tubería secundaria y una válvula de control.

    Por otro lado se requieren 51 agujeros para las salidas secundarias ($6000 \div 120 + 1 = 51$) y 21 para las válvulas de control ($6000 \div 300 + 1 = 21$), es decir, 72 hoyos, de los cuales coinciden 11.

    Por lo tanto se deben hacer un total de $72 - 11 = 61$ agujeros.

    Un concepto similar al de mínimo común múltiplo es el de máximo común divisor.

11. (IE, IN, 2013) Se desea envasar 84ml, 252ml y 378ml de tres sustancias distintas en el menor número de frascos con la misma capacidad y sin mezclarlas. La cantidad total de frascos es

    (a) 12
    (b) 17
    (c) 42
    (d) 119

    Solución

    Debido a que se desea envasar tres cantidades distintas en el menor número de frascos, se debe determinar el máximo común divisor de esas cantidad. Este número será la capacidad de cada frasco.

    Verifique que M.C.D (84, 252, 378)= 42. Es decir cada frasco contiene 42ml. Así la cantidad de frascos de 84ml, 252ml y 378ml es, respectivamente, 2 ($84 \div 42 = 2$), 6 ($252 \div 42 = 6$) y 9 ($378 \div 42 = 9$). Por lo tanto, la cantidad total de frascos es $2 + 6 + 9 = 17$. La respuesta correcta es la opción B.

12. (IE, IN, 2018) La suma de los dígitos del mayor divisor del número $n = 1\,223\,334\,444$, distinto de n, es

(a) 32
(b) 33
(c) 34
(d) 35

Solución

Como el número es par, se tiene que $n = 2 \cdot k$, con $k = n \div 2$ divisor de n. Como se pide el mayor divisor distinto del número original, este es precisamente $k = n \div 2 = 611667222$, cuyas cifras suman 33. La respuesta correcta es la opción (b).

13. (IE, IN, 2018) Cuando el entero positivo x se divide por 5, el residuo es 2. El residuo cuando $3x$ se divide por 5 es

(a) 1

(b) 2

(c) 3

(d) 5

Solución

Por el algoritmo de la división se tiene que $x = 5c + 2$, donde c es el cociente; ahora bien, si se multiplica por tres se obtiene $3x = 3(5c+2) = 15c + 6 = 15c + 5 + 1 = 5(3c+1) + 1$, haciendo $k = 3c + 1$ se tiene que $3x = 5k + 1$, por lo tanto el residuo es 1. La respuesta correcta es la opción (a).

14. (IE, IN, 2018) Al dividir 2018 por un número desconocido obtenemos residuo 143, entonces es verdadero que el producto del cociente por el divisor es

(a) par

(b) primo

(c) múltiplo de 3

(d) múltiplo de 11

Solución

Sea p el divisor y q el cociente entonces por el algoritmo de la división tenemos:

$$2018 = p \cdot q + 143 \Rightarrow 2018 - 143 = p \cdot q \Rightarrow 1875 = p \cdot q$$

$\therefore$ El producto del cociente por el divisor es múltiplo de 3. La respuesta correcta es la opción (c).

15. En una finca se tienen tres cerdos, seis gallinas y cierto número de vacas. Si se contaron 44 patas entre todos los animales, el número de vacas de la finca es

    (a) 6

    (b) 5

    (c) 4

    (d) 3

    Solución

    Nótese que seis gallinas tienen en total 12 patas y tres cerdos también tienen 12 patas, para un total de 24.

    Eso quiere decir que hay 20 patas entre todas las vacas, cada una tiene cuatro patas, por lo que debe haber 5 vacas. La respuesta correcta es la opción (b).

16. (IE, IN, 2016) La cantidad de números de tres dígitos, donde el dígito de las centenas es el doble del dígito de las unidades y la suma de sus dígitos es 12, corresponde a

    (a) 2
    (b) 4
    (c) 6
    (d) 8

    Solución

    Sea $n = abc$ un número que cumpla las condiciones pedidas. Como el dígito de las centenas es el doble del de las unidades, c puede tomar los valores $1, 2, 3, 4$. Por lo tanto, tenemos cuatro números diferentes: $2b1$, $4b2$, $6b3$ y $8b4$. Además, como la suma de los dígitos es 12, con cada uno de estos cuatro números se encuentra un valor para b, así los números que cumplen las condiciones son 4: 291, 462, 633 y 804. La respuesta correcta es la opción (b).

17. (IE, IN, 2016) En un colegio, se sabe que $\dfrac{40}{71}$ de los estudiantes tienen ojos café, $\dfrac{8}{213}$ tienen cabello rubio y $\dfrac{3}{8}$ son hombres . La cantidad mínima de estudiantes que puede tener el colegio es

    (a) 568
    (b) 1704
    (c) 5112
    (d) 120984

Solución

El mínimo número de estudiantes viene dado por el mínimo común múltiplo de $213, 71$ y 8, y este es 1704. La respuesta correcta es la opción (b).

18. (IE, IN, 2016) La cantidad de números múltiplos de 6, de tres dígitos, tales que la suma de sus dígitos es 24 corresponde a

    (a) 4
    (b) 6
    (c) 8
    (d) 12

Solución

Dado que el número es múltiplo de 6 lo será también de 2 y 3. El hecho de que el número sea múltiplo de tres coincide con la propiedad de que la suma de sus dígitos sea 24.

Como el número es par hay cinco posibilidades para el dígito de las unidades: 0, 2, 4, 6, 8.

- El dígito de las unidades no puede ser 0, 2 o 4. Esto porque de ser así la suma de los otros dos dígitos deberían ser 24, 22 y 20 respectivamente, lo cual es imposible.
- El dígito de las unidades es 6. En este caso la suma de los otros dos dígitos es 18. Solo hay un número de tres cifras con estas características: 996.
- El dígito de las unidades es 8. Ahora los otros dos dígitos deben sumar 16. Hay tres números con estas características: 888, 978 y 798.

En total hay cuatro números de tres dígitos que cumplen las condiciones del problema. La respuesta correcta es la opción (a).