OLIMPIADAS COSTARRICENSES DE MATEMÁTICA
CAPACITACIÓN III ELIMINATORIA 2019
I NIVEL. TEMA: Álgebra Básica
Viernes 1 de noviembre. Taller 1

Descripción:

En este taller se pretende mostrar el uso de conceptos algebraicos básicos como una herramienta útil para resolver ejercicios de los tres principales temas de I Nivel, como son geometría, teoría de números y razonamiento lógico.

Es importante tomar en cuenta que muchos de los ejercicios que se proponen como ejemplos podrían resolverse por medio de otras estrategias en las que no se utilice un proceso algebráico, lo cual también es válido, pero en muchas ocasiones los procesos algebráicos son más generales y serán de mayor utilidad conforme se avance en los siguientes niveles de olimpiadas.

Enunciados y soluciones de los problemas

1. (IIE, IN, 2017) Sofía tiene cierta cantidad de caramelos; se come 30 % de ellos y le quedan 280 caramelos. Carol tiene la misma cantidad de caramelos que Sofía, pero se come 26 % de ellos. Determine la cantidad de caramelos que Carol se come.

- Solución:

  Sofía tiene x caramelos, se come 30 %, le queda 70 %. Es decir, le quedan $\dfrac{70x}{100}$ caramelos, lo cual es 280 caramelos.
  De $\dfrac{70x}{100} = 280$ se tiene que $x = 400$.

  Sofía tiene entonces 400 caramelos, pero Carol se come 26 % de ellos; es decir, $\dfrac{400 \cdot 26}{100} = 104$ caramelos.

2. (IIE, IN, 2019) La suma de siete enteros consecutivos es 1001. Determine la suma del menor y el mayor de estos siete números.

- **Solución:**

  Siete números consecutivos pueden expresarse de la forma $n-3, n-2, n-1, n, n+1, n+2, n+3$, cuya suma es $7n$ y el número de enmedio es n.
  Como la suma de todos ellos es 1001 entonces se tiene $7n = 1001$, por lo que

$$n = \frac{1001}{7} = 143$$

  Luego, el menor es 140 y el mayor es 146, por lo que su suma es 286.

3. (IIE, IN, 2019) Sean a, b y c los dígitos del número de tres cifras abc. Si se sabe que el producto de este número con su cifra de unidades es 2 529, el producto de ese mismo número con cifra de las centenas 6 744 y las cifras de las centenas son el doble que las de las decenas, determine el valor de $abc \cdot abc$. (siendo este el producto usual)

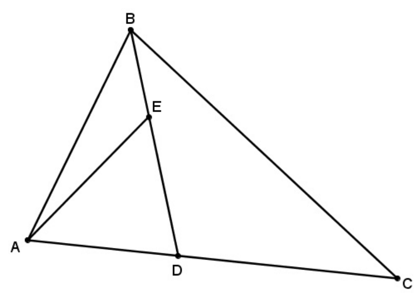
- **Solución:**

De los datos se tiene que $abc \cdot a = 6\,744$, $abc \cdot c = 2\,529$ y $a = 2 \cdot b$.
Luego, $abc \cdot a = abc \cdot 2 \cdot b = 6\,744 \Rightarrow abc \cdot b = 3\,372$.
Considerando la notación desarrollda de abc se tiene: $(a \cdot 100 + b \cdot 10 + c) \cdot abc$.
Considerando el algoritmo de la multiplicación:

$$(a \cdot 100 + b \cdot 10 + c) \cdot abc = a \cdot 100 \cdot abc + b \cdot 10 \cdot abc + c \cdot abc$$

$$= 2\,529 + 33\,720 + 674\,400 = 710\,649$$

4. (Banco IIIE, IN, 2017) En el triángulo ABC de la figura adjunta, se tiene que el $\angle ABD$ mide $36°$, el $\angle BCA$ mide el doble del $\angle BAE$, $AD = ED$ y $AC = BC$. Determine la medida del $\angle BAE$.



Solución:

Sea x la medida del $\angle BAE$.

Como el $\angle BCA$ mide el doble del $\angle BAE$, el $\angle BCA$ mide $2x$.

Luego, el $\angle AED$ mide $36° + x$ (Pues es ángulo externo de un triángulo AEB).

Como $AD = ED$, el $\angle EAD$ mide $36° + x$.

Además, el $\angle BAC$ mide $36° + 2x$.

Luego, como $AC = BC$, el $\angle ABC$ mide $36° + 2x$.

Así, $36° + 2x + 36° + 2x + 2x = 180°$ y $x = 18°$.

5. (IIE, IN, 2018) Determine todos los números naturales N de dos dígitos, tales que N equivale a siete veces la suma de sus dígitos.

   Solución

   Sean a y b los dígitos y N el número, tal que $N = ab$.

   Utilizando notación desarrollada se tiene que $N = 10a + b$.

$$
\begin{aligned}
10a + b &= 7\,(a + b) \\
10a + b &= 7a + 7b \\
3a &= 6b \\
a &= 2b
\end{aligned}
$$

   Lo cual significa que a es un número par. Así:
   Si $a = 2$, $b = 1$.
   Si $a = 4$, $b = 2$.
   Si $a = 6$, $b = 3$.
   Si $a = 8$, $b = 4$.

   Entonces los números que cumplen dicha característica son $21, 42, 63$ y 84

6. (IIE, IN, 2017) Una pulga quiere subir una escalera. Ella puede hacer solo dos tipos de brincos: tres escalones hacia arriba o cuatro escalones hacia abajo. Empezando a nivel del piso, determine la cantidad mínima de brincos que tendrá que dar la pulga para descansar en el escalón 22.

- Solución:

  Si la pulga sube 30 escalones (10 brincos hacia arriba) y luego baja 8 escalones (2 brincos hacia abajo) se llega a descansar en el escalón 22.

  Ahora, note que hay que dar al menos 8 saltos, puesto que 7 o menos no llegaría a 22 ($3 \times 7 = 21$).

  Por lo que se puede simplificar el problema a resolver $3x - 4y = 1$, minimizando $x + y$, donde ambos son enteros positivos, y representa los saltos hacia abajo, y x los saltos hacia arriba, después del sétimo hacia arriba.

  Claramente $x > y$. Si hubiese una solución con $x + y < 5$, se tendría que los únicos casos con posibilidad de satisfacer las condiciones serían $x = 2, y = 1$ ($3x - 4y = 2$), o $x = 3, y = 1$ ($3x - 4y = 5$), donde ninguno satisface.

  Por lo tanto, el menor número de saltos sería 12.

7. (IIE, IN, 2017) Carlos tiene cuadrados verdes de tamaño 1×1, cuadrados amarillos de tamaño 2×2 y cuadrados rojos de tamaño 3×3. Él quiere crear un cuadrado usando estos cuadrados, en el cual aparezcan los tres colores. Determine la mínima cantidad de cuadrados que debe utilizar.

- Solución:

  Si usa al menos un cuadrado rojo y uno amarillo se debe completar un cuadrado 5×5. Usando dos cuadrados amarillos más, y cuatro verdes se completa el cuadrado con 8 cuadrados.

  Falta ver que no es posible hacerlo con menos. Observe que la máxima área que se puede cubrir con 7 cuadrados es $5 \cdot 9 + 4 + 1 = 50$. Sean x, y, z las cantidades de cuadrados de cada tipo, entonces debe cumplirse que

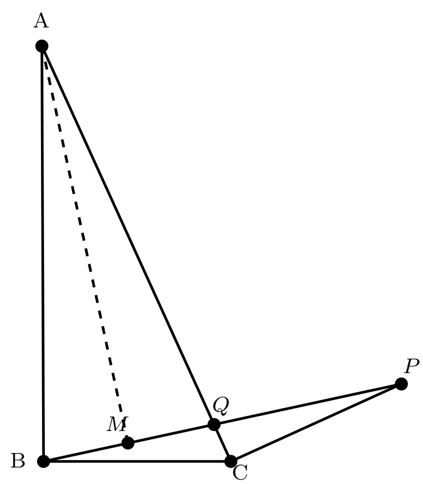
$$\begin{aligned} 9x + 4y + z &= n^2 \\ x + y + z &\leq 7 \end{aligned}$$

  donde $n = 5, 6, 7$. Las únicas soluciones son $(x, y, z) = (3, 2, 1)$ y $(x, y, z) = (2, 1, 3)$, y verificando directamente se comprueba que ninguna de estas configuraciones es posible.

8. (IIIE, IN, 2018) Considere el $\triangle ABC$ recto en B. Sea P un punto, tal que $\angle ACP$ es recto y $\overline{BP}$ interseca a $\overline{AC}$ en Q. Si M es el punto medio de $\overline{BQ}$ y $BC = CP$, determine $m\angle AMB$.

   Solución:

   Considere la figura siguiente:



   Tenemos que $m\angle ACP = 90°$ por ser recto.

   Como $BC = CP$ entonces $\triangle BCP$ es isósceles y, así, $m\angle PBC = m\angle BPC = x$.

   Como $\angle ABC$ es recto, entonces $m\angle ABQ$ es $90° - x$.

   $\triangle QCP$ es recto en C, entonces se tiene que $m\angle PQC = 90° - x$ y, así, $m\angle AQM = 90° - x$ (opuestos por el vértice).

   Entonces $\triangle AQB$ es isósceles, por lo que $\overline{AM} \perp \overline{BQ}$ y, por lo tanto, $m\angle AMB = 90°$.

9. (Banco IIIE, IN, 2016) Hallar el menor número natural que es suma de 10 naturales consecutivos, de 11 naturales consecutivos y de 13 naturales consecutivos.

Solución

Sea n el número natural que cumple las condiciones del enunciado.

Para $a > 4$ se cumple que

$$\begin{aligned} n &= (a-4)+(a-3)+(a-2)+(a-1)+a+(a+1)+(a+2)+(a+3) \\ &\quad +(a+4)+(a+5) \\ n &= 10a+5 \\ n &= 5(2a+1) \end{aligned}$$

Esto indica que n es múltiplo de 5, pero no de 10.

Para $b > 5$ se cumple que

$$\begin{aligned} n &= (b-5)+(b-4)+(b-3)+(b-2)+(b-1)+b+(b+1)+(b+2) \\ &\quad +(b+3)+(b+4)+(b+5) \\ n &= 11b \end{aligned}$$

Esto indica que n es múltiplo de 11.

Para $c > 6$ se cumple que

$$\begin{aligned} n &= (c-6)+(c-5)+(c-4)+(c-3)+(c-2)+(c-1)+c+(c+1)+(c+2) \\ &\quad +(c+3)+(c+4)+(c+5)+(c+6) \\ n &= 13c \end{aligned}$$

Esto indica que n es múltiplo de 13.

El menor número natural que cumple que es múltiplo de 5 (pero no de 10), de 11 y de 13 es $n = 5 \cdot 11 \cdot 13 = 715$.

$\therefore$ El menor número natural que es suma 10 naturales consecutivos, de 11 naturales consecutivos y de 12 naturales consecutivos es 715.