I Nivel Día 1

Taller 2. Razonamiento (Conteo, probabilidad)

Facilitadora: Diana Chacón Camacho

Técnicas básicas de conteo (regla de la suma y del producto, concepto de probabilidad, sucesiones, suma de Gauss.

Conteo

Principio de la suma

Si una tarea o acción puede realizarse de m formas diferentes, y otra tarea o acción puede realizarse de n formas diferentes, pero de modo que no es posible realizarlas simultáneamente, entonces, tendremos $m+n$ formas diferentes de realizar una de ellas.

En general:
Si las maneras de realizar un proceso se clasifican en k casos, n_i es la cantidad de manera de realizar el proceso ubicado en el caso i, con $i = 1,2,3,\dots,k$ entonces el número total de maneras de realizar el proceso es $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$

Ejemplo 1:
El colegio San Bartolomé tiene 5 grupos de quinto año, 9 grupos de cuarto año y 18 grupos de noveno año. Una empresa regalará una fiesta a un grupo de los anteriores, si el grupo se elige al azar, ¿de cuántas maneras se puede seleccionar?

Solución:
El proceso de selección de un grupo puede estar en alguno de los siguientes casos
Caso I. Elegir un grupo de quinto: hay 5 maneras.
Caso II: Elegir un grupo de cuarto: hay 9 maneras.
Caso III: Elegir un grupo de noveno: hay 18 maneras.
Por lo tanto, el número de maneras de elegir un grupo de tercer ciclo es $5 + 9 + 18 = 32$

Ejemplo 2:
Supongamos que este sábado queremos ir al cine, o al teatro, pero no ambas cosas a la vez. Si se exhiben 12 películas y 8 obras de teatro ¿cuántas posibilidades o decisiones tenemos?

Solución:
Podremos elegir una de las 12 películas o una de las 8 obras de teatro; en total tendremos 12+8=20 posibilidades.

Principio del producto

Si un procedimiento o actividad puede descomponerse en las etapas primera y segunda, y existen m resultados posibles para la primera etapa y si, para cada uno de estos resultados, existen n resultados posibles para la segunda etapa, entonces el procedimiento total puede realizarse, en el orden dado, de $m \cdot n$ formas.

En general:

En genera: La realización de un proceso se divide en k etapas. Además n_i es la cantidad de manera de realizar la etapa i, con $i = 1, 2, 3 ..., k$. Entonces el número total de maneras de realizar el proceso es $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \ldots \cdot n_k$

Ejemplo 3:

Supongamos que este sábado queremos ir al teatro y luego a cenar. Si se exhiben 4 obras de teatro y hay 5 restaurantes ¿cuántas posibilidades de elección tenemos?

Solución:

Tenemos 4 posibilidades de elegir una obra de teatro y por cada una de ellas tenemos 5 posibilidades de elegir un restorán. Tendremos entonces, $4 \times 5 = 20$ posibilidades de ir al teatro y luego cenar

Ejemplo 4:

Cuántos números de cuatro dígitos se puede formar con los dígitos 1,2,3,4,5,6,7, si:

a) No hay restricciones
b) No se pueden repetir los números.
c) no se pueden repetir los números y el dígito de las centenas es impar.

Solución:

a) No hay restricciones

El proceso de formar uno de estos números se puede dividir en cuatro etapas:
Etapa I. Se elige el primer dígito (dígito de las unidades): hay 7 maneras.
Etapa II. Se elige el segundo dígito: hay 7 maneras.
Etapa III. Se elige el tercer dígito: hay 7 maneras.
Etapa IV. Se elige el cuarto dígito: hay 7 maneras.
Por lo tanto, se pueden formar $7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^4 = 2401$ números, si no hay restricciones.

b) No se pueden repetir los números.

El proceso de forma uno de estos números se puede dividir en cuatro etapas:
Etapa I. Se elige el primer dígito (dígito de las unidades): hay 7 maneras.
Etapa II. Se elige el segundo dígito: hay 6 maneras.
Etapa III. Se elige el tercer dígito: hay 5 maneras.
Etapa IV. Se elige el cuarto dígito: hay 4 maneras.
Por lo tanto, se pueden formar $7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$ números con esta restricción.

c) no se pueden repetir los números y el dígito de las centenas es impar.

Etapa I. Se elige el tercer dígito (dígito de las decenas): hay 4 maneras.

Etapa II. Se elige el primer dígito: hay 6 maneras.
Etapa III. Se elige el segundo dígito: hay 5 maneras.
Etapa IV. Se elige el cuarto dígito: hay 4 maneras.
Por lo tanto, se pueden formar $4\times\ 6\times\ 5\times\ 4=480$ números con esta restricción.

Concepto de probabilidad

Probabilidad simple es igual a la cantidad de formas en que un resultado específico va a suceder entre la cantidad total de posibles resultados.

Probabilidad (Regla de Laplace)

La probabilidad de que suceda un evento A se calcula de la siguiente manera:

$$P(A)=\frac{Número\ de\ casos\ favorables}{Número\ de\ casos\ totales}$$

Dado un experimento, la probabilidad o medida de posibilidad de que ocurra un evento determinado A será un número entre 0 y 1, que se interpreta como un porcentaje. Así si la probabilidad de A es 0.8, esto indica que el evento tiene un 80% de posibilidad de ocurrir.

Ejemplo 5:
Si se escoge al azar un número de teléfono y se observan las dos últimas cifras, determine:
a) La probabilidad de que las dos cifras sean iguales.
b) La probabilidad de que la suma de las dos últimas cifras sea 11.
c) La probabilidad de que la suma de las dos últimas cifras sea mayor que 7 y menor que 13.

Solución:
a) La probabilidad de que las dos cifras sean iguales.
Se debe seleccionar sólo el último digito para las unidades, para el cual hay 10 opciones.
Los casos totales son 10 opciones para el último digito y 10 opciones para el penúltimo, es decir $10\times 10=100$, por tanto $P=\frac{1}{10}$.
b) La probabilidad de que la suma de las dos últimas cifras sea 11.
Existen 8 casos favorables a este evento, son los números 29,92,38,83,74,47,56,65.
Los casos totales son 100, por tanto $P=\frac{8}{100}=\frac{2}{25}$.
c) La probabilidad de que la suma de las dos últimas cifras sea mayor que 7 y menor que 13

Sean a y b el último y penúltimo digito del número de teléfono.
Primero contemos los casos probables. Analicemos los distintos casos para a.
Si $a=0\ \Rightarrow b$ puede ser 8 o 9. Es decir, 2 casos favorables.
Si $a=1\ \Rightarrow b$ puede ser 7, 8 o 9. Es decir, 3 casos favorables.
Si $a=2\ \Rightarrow b$ puede ser 6, 7, 8 o 9. Es decir, 4 casos favorables.
Si $a=3\ \Rightarrow b$ puede ser 5, 6, 7, 8 o 9. Es decir, 5 casos favorables.
Si $a=4\ \Rightarrow b$ puede ser 4, 5, 6, 7 o 8. Es decir, 5 casos favorables.

Si $a = 5$ $\Rightarrow b$ puede ser 3, 4, 5, 6 o 7. Es decir, 5 casos favorables.
Si $a = 6$ $\Rightarrow b$ puede ser 2, 3, 4, 5 o 6. Es decir, 5 casos favorables.
Si $a = 7$ $\Rightarrow b$ puede ser 1, 2, 3, 4 o 5. Es decir, 5 casos favorables.
Si $a = 8$ $\Rightarrow b$ puede ser 0, 1, 2, 3, o 4. Es decir, 5 casos favorables.
Si $a = 9$ $\Rightarrow b$ puede ser 0, 1, 2, o 3. Es decir, 4 casos favorables.
En total hay 43 casos favorables de 100 números posibles. $P = \frac{43}{100}$.

El principio del palomar

Si se tienen n palomas ubicadas en m palomares, y $n > m$, entonces hay por lo menos un palomar con dos o más palomas.

Ejemplo

Demuestre que, si se escogen 7 números del 1 al 12, dos de ellos sumarán 13.

Solución:

Considere los conjuntos (palomares): $A1 = \{1, 12\}$, $A2 = \{2, 11\}$, $A3 = \{3, 10\}$, $A4 = \{4, 9\}$, $A5 = \{5, 8\}$, $A6 = \{6, 7\}$. Los siete números (palomas) a escoger están ubicados en alguno de los seis conjuntos, por el principio del palomar, hay dos números que estará ubicados en el mismo conjunto.

Sucesiones

Una sucesión es una secuencia de números, por ejemplo:

$$a : -3,\ \ 2,\ \ 7,\ \ 11,\ \ \ldots$$

Si a es una sucesión el primer término se denomina a_1, en este caso $a_1 = -3$, el segundo término es $a_2 = 2$. La fórmula con la que se generan todos los términos se denomina término general, se denota como a_n, en este caso $a_n = 5n - 8$.

Las sucesiones aritméticas

Es una secuencia donde cada término (excepto el primero) se obtiene sumando al anterior una cantidad fija d, llamada razón (diferencia) de la progresión.
Para la secuencia aritmética a: $a_1, a_2, a_3,$ ... con diferencia d, se puede verificar que

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

Por ejemplo b: $-4, -1, 2, 5, 8, \ldots$ es una sucesión aritmética con $a_1 = -4$ y $d = 3$, por lo tanto

$$b_n = -4 + (n - 1) \times 3$$

Los números naturales también forman una secesión aritmética, es decir c: $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ es una progresión aritmética.
Si se quisiera calcular la suma de los primeros cien términos de esta sucesión, es decir, $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots 100$ se puede proceder haciendo una agrupación de la siguiente manera

$1+2+\ 3+\ 4+\cdots 100$
$$= (1+100)+(2+99)+(3+98)+(4+97)+\cdots+(48+53)+(49+52)+(50+51)$$
Como se puede observar $1+100=2+99=3+98=\cdots=50+51=101$
Por lo que tenemos una suma se cincuenta parejas que suman 101, es decir
$1+2+\ 3+\ 4+\cdots 100=50\times 101=5050$
Este resultado es conocido como la suma de Gauss en honor al matemático alemán Carl Friedrich Gauss.
En general, si se quieren sumar los primeros n términos de una sucesión aritmética, se tiene que la suma de los n primeros términos (S_n)
$$S_n = a_1 + a_2 + \ a_3 \ + \cdots \ + a_n$$
$$= (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \cdots + \left(a_{\frac{n}{2}} + a_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}\right)$$
$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$
Las sucesiones geométricas
Es una secuencia donde cada término (excepto el primero) se obtiene multiplicando al anterior una cantidad fija r, llamada razón de la sucesión.
Para la secuencia geométrica a: $a_1, a_2, a_3,$ ... con razón r, se puede verificar que $a_n = r^{n-1}$.
Por ejemplo, para la sucesión b: $6, 18, 54,\ 162, 486, \ldots$ es una sucesión geométrica con $b_1 = 6$ y $\mathrm{r} = 3$, además el término general $b_n = 3^{n-1}$.
Para determinar la suma de los primeros n términos de una progresión geométrica se tiene la siguiente fórmula:
$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$$
Continuando con el ejemplo de la sucesión b: $6, 18, 54,\ 162, 486, \ldots$ el cálculo de la suma de los primeros cuatro términos de esta sucesión es:
$$S_4 = \frac{6(3^4 - 1)}{3 - 1} = \frac{6 \times 80}{2} = 240$$

Ejercicios recomendados

1. Sean AB y CD dos segmentos no paralelos que no se intersecan. En AB se marcan 8 puntos, mientras que en CD se marcan 15 puntos. ¿Cuántos triángulos se pueden formar con los puntos marcados?
2. Del conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14} se seleccionan al azar cuatro números distintos, sin importar el orden en que se elijan. Por ejemplo, escoger los números 3, 1, 10 y 11 es lo mismo que elegir 11, 1, 3 y 10. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los cuatro números sea impar?
3. Ana, Bruno y Carlos deciden apostar 10000, 12000 y 14000 colones respectivamente cada uno de la siguiente forma:

   Primero, Ana pone 10 colones en la mesa, luego Bruno pone 20 colones, luego Carlos pone 30 colones, luego Ana pone 40 colones más, Bruno pone 50 más, etc., aumentando de 10 en 10 hasta que alguno de los tres no tenga dinero suficiente para poner en la mesa lo que le corresponde. La primera persona que no puede poner dinero se lleva los 36000 colones.

   Determine quién gana los 36000 colones y por qué.
4. Una caja contiene 900 tarjetas, numeradas del 100 al 999.Se sacan al azar (sin reposición) tarjetas de la caja y se anota la suma de los dígitos de cada tarjeta extraída. ¿Cuál es la menor cantidad de tarjetas que se deben sacar, para garantizar que al menos tres de esas sumas sean iguales?
5. El país de Xrpqsrti está formado por 43 islas y 210 ciudades distribuidas en las 43 islas de modo que en la isla k hay al menos k ciudades. Entre dos ciudades de cada isla hay exactamente un camino y entre dos ciudades de islas distintas no hay caminos. Hallar la mínima y la máxima cantidad de caminos posibles que tiene el país Xrpqsrti.
6. 2014 personas participan en una guerra de papel. Cada persona le disparó a otras 1007 personas exactamente una bola de papel a cada una. Pruebe que existen dos personas que se disparan mutuamente.
7. Los puntos X, Y, Z se encuentran sobre los segmentos $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente en el ΔABC, donde $\overline{BY}$, $\overline{AX}$ y $\overline{CZ}$ concurren en un punto P. ¿Cuántos triángulos con sus tres vértices en el conjunto de puntos {A, B, C, X, Y, Z, P} existen?