I Nivel Día 1

Taller 2. Razonamiento (Conteo, probabilidad)

Facilitadora: Diana Chacón Camacho

Técnicas básicas de conteo (regla de la suma y del producto, concepto de probabilidad, sucesiones, suma de Gauss.

Soluciones da los ejercicios.

1. Sean AB y CD dos segmentos no paralelos que no se intersecan. En AB se marcan 8 puntos, mientras que en CD se marcan 15 puntos. ¿Cuántos triángulos se pueden formar con los puntos marcados?

Solución:

Los triángulos pueden tener dos vértices AB y uno en CD, o bien dos vértices en CD y uno en AB.

En el primer caso se pueden escoger $\frac{8\times7}{2} = 28$ parejas para formar un segmento.

Multiplicando por el número de puntos CD, obtenemos $28 \times 15 = 420$.

Ahora, si tomamos dos puntos en CD, tenemos $\frac{15\times14}{2} = 105$ segmentos, y en $195 \times 8 = 840$ triángulos.

En total, tendríamos $420 + 840 = 1260$ triángulos.

2. Del conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14} se seleccionan al azar cuatro números distintos, sin importar el orden en que se elijan. Por ejemplo, escoger los números 3, 1, 10 y 11 es lo mismo que elegir 11, 1, 3 y 10. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los cuatro números sea impar?

Solución: Primero se deben calcular la cantidad de combinaciones que producen efectivamente una suma impar. Esto se logrará con tres pares y uno impar o bien tres impares y un par. Para el primer caso, los tres pares se puede escoger $\frac{7\cdot6\cdot5}{6}$ formas, pues para la primera elección hay 7 posibilidades de número par, para la segunda hay 6 y para la tercera 5, pero no importa el orden en el que se elijan, por lo que se dividirá entre 3 · 2 · 1 = 6. Ahora, para el número impar hay 7 posibilidades, por lo que se deben multiplicar por 7. Para un total de $\frac{7\cdot7\cdot6\cdot5}{6}$ = 245 maneras. Para el segundo caso hay la misma cantidad de formas, usando un razonamiento similar al anterior, pero con impares en vez de pares.

Ahora la cantidad de casos favorables es entonces $\frac{2\cdot7\cdot7\cdot6\cdot5}{6}$ = 490.

La cantidad de casos totales es $\frac{14\cdot13\cdot12\cdot11}{24}$ pues para escoger cualesquiera cuatro números, la primera elección se puede hacer de 14 maneras, la segunda de 13, la tercera de 12, para la cuarta 11, pero no importa el orden en que se elijan, por lo que se dividirá entre 4 · 3 · 2 · 1 = 24. Para un total de $\frac{14\cdot13\cdot12\cdot11}{24}$ = 1001.

Así, la posibilidad de que la suma de los números sea impar es $\frac{490}{1001} = \frac{70}{143}$

3. Ana, Bruno y Carlos deciden apostar 10000, 12000 y 14000 colones respectivamente cada uno de la siguiente forma:

Primero, Ana pone 10 colones en la mesa, luego Bruno pone 20 colones, luego Carlos pone 30 colones, luego Ana pone 40 colones más, Bruno pone 50 más, etc., aumentando de 10 en 10. Hasta que alguno de los tres no tenga dinero suficiente para poner en la mesa lo que le corresponde. La primera persona que no puede poner dinero se lleva los 36000 colones.

Determine quién gana los 36000 colones y por qué.

Solución:

Observe que la cantidad de dinero que pone Ana es

$$\begin{aligned} 10+40+70+\cdots+\ (10+30k) &= 10+(10+30\cdot 1)+(10+30\cdot 2)+\cdots+(10+30\cdot k) \\ &= 10+10k+30(1+2+\cdots+k) \\ &= 10+10k+30\cdot\tfrac{k(k+1)}{2} \\ &= 10+10k+15k(k+1) \end{aligned}$$

De forma análoga, las cantidades que ponen Bruno y Carlos, respectivamente, son

$$20+50+80+(20+30k)=20+20k+15k(k+1)$$

$$30+60+70+(30+30k)=30+30k+15k(k+1)$$

Podemos ver que si $k=24$ los tres pueden seguir poniendo dinero, al $k=25$ Ana no puede poner más, puesto que debe poner 760 pero hasta la jugada 24 ha gastado 9250.

4. Una caja contiene 900 tarjetas, numeradas del 100 al 999.Se sacan al azar (sin reposición) tarjetas de la caja y se anota la suma de los dígitos de cada tarjeta extraída. ¿Cuál es la menor cantidad de tarjetas que se deben sacar, para garantizar que al menos tres de esas sumas sean iguales?

Solución: Hay 27 posibles resultados para la suma de dígitos (de 1a 27). Las sumas 1 y 27 sólo se pueden obtener de un modo (100 y 999). En el caso más desfavorable al sacar 52= (27 + 25) tarjetas todas repetirán suma dos veces y en la siguiente (extracción 53) una de ellas aparecerá por tercera vez. Por tanto el número pedido es 27 + 25 + 1 = 53.

5. El país de Xrpqsrti está formado por 43 islas y 210 ciudades distribuidas en las 43 islas de modo que en la isla k hay al menos k ciudades. Entre dos ciudades de cada isla hay exactamente un camino y entre dos ciudades de islas distintas no hay caminos. Hallar la mínima y la máxima cantidad de caminos posibles que tiene el país Xrpqsrti.

   Solución:

   Observe que si en la isla k existen j ciudades, desde cada ciudad hay $j-1$ caminos a las ciudades restantes, es decir, hay en total $\frac{j(j-1)}{2}$ caminos. De esto se ve por ejemplo que si tenemos 1 ciudad en la isla, y 3 en otra, se obtienen más caminos que al tener dos ciudades en ambas islas. Con este razonamiento se ve que la máxima cantidad de caminos se va a obtener si tenemos la máxima cantidad de ciudades en una solo isla, y las demás con la mínima cantidad de ciudades posibles, esto se logra poniendo una ciudad en la primera, dos en la segunda y así sucesivamente, al final, se ponen 42 en la isla 42 y las restantes 107 ciudades en la isla 43. De esto se tiene que el máximo es

$$\frac{1(1-1)}{2}+\frac{2(2-1)}{2}+\cdots+\frac{42(42-1)}{2}+\frac{1107(1107-1)}{2}=624512$$

Por el mismo argumento se ve que el mínimo se va a obtener si se distribuye de igual manera las ciudades en todas las islas, esto se logra poniendo 47 ciudades en 32 islas, y 46 ciudades en las 11 islas restantes, esto puesto que se trata de rellenar todas las islas con la misma cantidad de ciudades de modo que esta cantidad sea mínima, en este caso se obtiene el mínimo que es

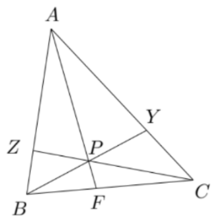
$$32 \times \frac{47(47-1)}{2} + 11 \times \frac{46(46-1)}{2} = 45977$$

6. 2014 personas participan en una guerra de papel. Cada persona le disparó a otras 1007 personas exactamente una bola de papel a cada una. Pruebe que existen dos personas que se disparan mutuamente.

Solución: Como cada una de las 2014 personas disparó en 1007 ocasiones, hubo en total 2014·1007 disparos. Además, note que entre las 2014 personas hay $\frac{2014 \cdot 2013}{2}$= 2013·1007 parejas de personas. Al ser 2014·1007>2013·1007, por el Principio de las Casillas existe al menos una pareja con al menos dos disparos realizados entre sí. Cada persona lanzó solamente una vez, por lo cual la única opción es que tales dos personas se hayan disparado mutuamente.

7. Los puntos X, Y, Z se encuentran sobre los segmentos $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente en el ΔABC, donde $\overline{BY}$, $\overline{AX}$ y $\overline{CZ}$ concurren en un punto P. ¿Cuántos triángulos con sus tres vértices en el conjunto de puntos {A, B, C, X, Y, Z, P} existen?

Solución: No necesariamente están trazados en la figura.



Es obvio que los tres vértices deben ser puntos distintos dos a dos. En el conjunto $\{A, B, C, X, Y, Z, P\}$ se deben escoger tres de sus elementos (y el conjunto posee 7 elementos), la cantidad de formas de realizar esto es de $\binom{7}{3} = \frac{7!4!}{3!} = 35$ formas (cantidad que también se puede calcular manualmente). Sin embargo, no se puede elegir $\Delta AZB, \Delta APX, \Delta AYC, \Delta ZPC, \Delta BPY, \Delta BXC$ pues tales no son triángulos gracias a las condiciones de colinealidad dadas, por lo que a 35 hay que restarle tales triángulos que no existen o bien, que no son triángulos (están degenerados). Para un total de 35−6 = 29 triángulos con sus tres vértices en el conjunto de puntos $\{A, B, C, X, Y, Z, P\}$.