Teoría de Números

1. Hallar el menor número natural que es suma de 10 naturales consecutivos, de 11 naturales consecutivos y de 13 naturales consecutivos.

Solución

Sea n el número natural que cumple las condiciones del enunciado.

Para $a > 4$ se cumple que

$$\begin{aligned} n &= (a-4)+(a-3)+(a-2)+(a-1)+a+(a+1)+(a+2)+(a+3) \\ &\quad +(a+4)+(a+5) \\ n &= 10a+5 \\ n &= 5(2a+1) \end{aligned}$$

Esto indica que n es múltiplo de 5, pero no de 10.

Para $b > 5$ se cumple que

$$\begin{aligned} n &= (b-5)+(b-4)+(b-3)+(b-2)+(b-1)+b+(b+1)+(b+2) \\ &\quad +(b+3)+(b+4)+(b+5) \\ n &= 11b \end{aligned}$$

Esto indica que n es múltiplo de 11.

Para $c > 6$ se cumple que

$$\begin{aligned} n &= (c-6)+(c-5)+(c-4)+(c-3)+(c-2)+(c-1)+c+(c+1)+(c+2) \\ &\quad +(c+3)+(c+4)+(c+5)+(c+6) \\ n &= 13c \end{aligned}$$

Esto indica que n es múltiplo de 13.

El menor número natural que cumple que es múltiplo de 5 (pero no de 10), de 11 y de 13 es $n = 5 \cdot 11 \cdot 13 = 715$.

$\therefore$ El menor número natural que es suma 10 naturales consecutivos, de 11 naturales consecutivos y de 12 naturales consecutivos es 715.

2. Considere 5 números enteros positivos. Determine si es posible escoger 3 de ellos cuya suma sea múltiplo de 3.

   Solución:

   Haciendo la división entre 3 de cada uno de ellos, entonces una de las siguientes dos opciones debe suceder:

   - 3 números con resto $0, 1, 2$. En este caso la suma de ellos es múltiplo de 3.

   - Si hay uno de cada resto, esos 3 números suman un múltiplo de 3.

   En cualquier caso hay tres cuya suma es múltiplo de 3.

3. Un número de cuatro dígitos $1ab6$ es un cuadrado perfecto cuya raíz cuadrada es divisible por 3. Determine los digitos a y b.

   Solución

   Como $31^2 = 961$ y $45^2 = 2025$ entonces la raíz cuadrada está entre 31 y 45. Ahora, al terminar el número en 6 su raíz cuadrada debe terminar en 4 o 6 que reduce las soluciones a 34, 36 y 44 y como es también divisible por 3 solo puede ser 36. Así, $36^2 = 1296$ por lo que $a = 2$ y $b = 9$.

4. Encuentre todos los números enteros positivos de 4 dígitos tal que al eliminar cualquiera de sus dígitos el número de 3 dígitos que se obtiene divide al número original.

   Solución

   Como el número $\overline{abcd}$ es divisible por $\overline{abc}$ entonces se debe tener $d = 0$. Dado que $\overline{abcd} = \overline{abc0}$ es divisible por $\overline{abd} = \overline{ab0}$ entonces $c = 0$. Como $\overline{abcd} = \overline{ab00}$ es divisible por $\overline{acd} = \overline{a00}$ y por $\overline{bcd} = \overline{b00}$, el número ab es divisible por a y b, así, $b = ax$ y $10a = by$ para algunos enteros x, y.

   Por tanto, $10a = axy$ de donde $xy = 10$.

   Si $x = 1$, $y = 10$ entonces $a = b$ lo cual da 9 posibles números: 1100, 2200, 3300, 4400, 5500, 6600, 7700, 8800, 9900.

   Si $x = 2$, $y = 5$ entonces $2a = b$ y se obtienen los 4 números 1200, 2400, 3600, 4800.

   Si $x = 5$, $y = 2$ entonces $5a = b$ y se obtienen un único número 1500.

   El caso $x = 10$, $y = 1$ no se considera ya que a y b representan un solo dígito.

   Por lo tanto los números son: 1100, 1200, 1500, 2200, 2400, 3300, 3600, 4400, 4800, 5500, 6600, 7700, 8800, 9900.

5. Determine la suma de los dígitos del menor entero positivo d, tal que la suma $5d+4d+3d+2d+d$ sea un número mayor que 1000 y dicha suma posee todas sus cifras iguales.

   • Solución:

   Sea $s = 5d + 4d + 3d + 2d + d$; se tiene que $s = 15d = 3 \cdot 5 \cdot d$. Si $s = rrr \dots r$, siendo r un dígito, se tiene que $s = rrr \dots r$ es divisible por 5 y por 3.

   Para que $s = rrr \dots r$ sea divisible por 5, r tiene que ser igual a 0 o igual a 5; pero no puede ser igual a cero pues d no sería entero positivo; así que $r = 5$.

   Para que $s = rrr \dots r$ sea divisible por tres, la suma de sus dígitos debe ser múltiplo de 3; $s = 555$ es una cifra que satisface esta condición de ser divisible por 3 (pues la suma de sus dígitos es 15 -múltiplo de 3), pero no es mayor que 1000.

   La siguiente cifra que satisface ser múltiplo de tres es $r = 555\,555$ (la suma de sus dígitos es 30 -múltiplo de 3) y es mayor que 1000.

   Así, $15d = 555\,555 \Rightarrow d = 37\,037$.

   Por lo tanto, la suma de los dígitos del número buscado es 20.

6. Determinar todos los valores de los números primos p y q mayores que 8, con $p > q$ tales que $\dfrac{2016}{p+q}$ es un cuadrado perfecto mayor o igual que 25.

   • Solución:

   como $p > 8$ y $q > 8$, entonces $p + q > 16$ y $\frac{2016}{p+q} < 126$.

   Dado que $2016 = 2^5 3^2 7$ entonces los posibles valores de $\frac{2016}{p+q}$ son $2^4 3^2 = 144$, $2^2 3^2 = 36$, $2^4 = 16$, $3^2 = 9$.

   Puesto que $\frac{2016}{p+q} \geq 25$ se tiene que $\frac{2016}{p+q} = 36 \leftrightarrow p + q = 56$.

   De la ecuación anterior son soluciones $(p, q) = (37, 19), (43, 13)$.

7. Determine la cantidad de números impares n menores que 1000 que cumplen que mcd$(n, 2016)$ es un número de dos dígitos.

Solución:

Los posibles valores de $(n, 2016)$ son:
$1, 3, 7, 9, 21, 63$
$2, 6, 14, 18, 42, 126$
$4, 12, 28, 36, 84, 252$
$8, 24, 56, 72, 168, 504$
$16, 48, 102, 144, 336, 1008$
$32, 96, 224, 288, 672, 2016$

Dado que n es impar, se tiene que $n \in \{1, 3, 7, 21, 9, 63\}$ y los únicos de dos dígitos son 21 y 63.

$(n, 2016) = 21$ si $n = 21k$ y $2, 3$ no dividen a k.
Así, $n = 21k$ con $k \in \{1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 25, 29, 31, 35, 37, 41, 43, 47\}$.

Por otra parte, $(n, 2016) = 63$ si $n = 63k$ y 2 no divide a k.
Así $n = 63k$ con $k \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31\}$

Por lo tanto hay 32 números posibles.

8. Determine el número de maneras que se pueden escoger cuatro enteros positivos a, b, c y d, con $a < b$, $b < c$ y $c < d$, de manera que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 2$$

Solución:

Observemos que entre mayores sean los enteros, la suma es cada vez mas pequeña.

Si $a > 1$, la mayor suma posible es $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{77}{60} < 2$

Así, el único valor posible de a es 1.

Si $a = 1, b = 2, c = 3$, entonces

$$\frac{1}{d} = 2 - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{6}$$

por lo que $d = 6$ y tenemos una manera de escogerlos.

Si $a = 1, b = 3, c = 4$, entonces $\frac{1}{d} = 2 - \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{12}$, que no es posible.

Si $a = 1$ y $b > 3$ la mayor suma posible es $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{97}{60} < 2$.

Por lo tanto, solo existe una única manera de escoger los enteros.

9. Determine todos los números n de la forma $n = abcabc$, con a, b y c dígitos distintos, tales que n sea divisible por todos los números naturales desde 1 hasta 15.

Solución:

Observe que $abcabc = abc \cdot 1000 + abc = abc \cdot 1001 = abc \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, por lo que cualquier número de la forma $abcabc$ será divisible por 7, 11 y 13.

Para que n sea divisible por $1, 2, \ldots, 15$ basta que abc sea divisible por 5, 8 y 9 porque:

- Si es divisible por 8, lo será también por 2 y 4, y como ya n es divisible por 7, entonces también será divisible por 14.
- Si es divisible por 9, lo será también por 3, y al ser n divisible por 2 y 4, entonces también será divisible por 6 y 12.
- Si es divisible por 5, al ser n divisible por 2 y 3, entonces también será divisible por 10 y 15.

Para que abc sea divisible por 5, 8 y 9 debe ser múltiplo de ellos (pues son coprimos), es decir $abc = 5 \cdot 8 \cdot 9 \cdot k = 360k$; de donde $k = 1$ o $k = 2$ (pues $k > 2$ genera un número de más de tres dígitos), además en ambos casos se generan números cons dígitos distintos.

Por lo tanto, todos los números que cumplen las condiciones pedidas son $360\,360$ y $720\,720$.

10. Sea n un entero positivo y sea d_n el dígito de las unidades del número $1+2+3+\cdots+n$. Determine el residuo al dividir el número

$$d_1 + d_2 + d_3 + \cdots + d_{2017}$$

por 100.

Solución:

Dados 20 enteros positivos consecutivos cualesquiera, los dígitos de las unidades son

$$0 + 1 + 2 + \cdots + 9 + 0 + 1 \cdots + 9 = 90$$

Entonces $d_{n+20} = d_n$ para cualquier entero positivo $n \geq 1$. Esto significa que es suficiente calcular d_n para $1 \leq n \leq 20$, estos son

$$(d_1, d_2, \ldots, d_{20}) = (1, 3, 6, 0, 5, 1, 8, 6, 5, 5, 6, 8, 1, 5, 0, 6, 3, 1, 0, 0).$$

Entonces

$$\sum_{n=1}^{2017} d_n = 101 \sum_{n=1}^{20} d_n - \sum_{n=18}^{20} d_n = 101 \cdot 70 - 1 = 7069.$$

Finalmente, el residuo es 69.

11. Determine todos los números enteros de tres dígitos con exactamente 16 divisores positivos.

Solución:

Sea n el número buscado. Debe cumplirse: $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r}$ donde $p_1, p_2, \cdots, p_r$ son primos distintos y $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ son enteros positivos. El número de divisores positivos de n es $d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_r + 1)$.

Desde que $2^{10} > 1000$, debemos buscar números que sean producto de al menos dos primos distintos. Tenemos los siguientes dos casos:

Caso I: $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2}$.

Para este caso, $d(n) = 16$ si y solo si $\alpha_1 + 1 = 2$ y $\alpha_2 + 1 = 8$. Los números n que satisfacen $100 \leq n < 1000$ son: $2^7 \cdot 3 = 384, 2^7 \cdot 5 = 640$ y $2^7 \cdot 7 = 896$

Como también, $d(n) = 16$ si y solo si $\alpha_1 + 1 = 4$ y $\alpha_2 + 1 = 4$. Los números n que satisfacen $100 \leq n < 1000$ son: $2^3 \cdot 3^3 = 216$

Caso II: $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot p_4^{\alpha_4}$.

Entonces, $d(n) = 16$ si y solo si $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 1$. Los números de tres dígitos que son producto de cuatro primos distintos son: $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210, 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 = 330, 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13 = 390, 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17 = 510, 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 19 = 570, 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 23 = 690, 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 29 = 870, 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 31 = 930, 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 770$ y $2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 = 910$

De los casos I y II, todos los números enteros de tres dítitos con exactamente 16 divisores positivos son: 210, 216, 330, 384, 390, 510, 570, 640, 690,770, 870, 896, 910 y 930.