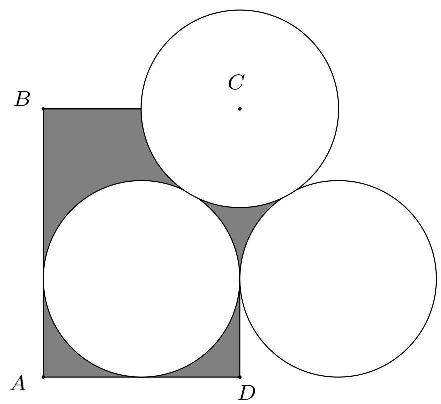
Geometría II Nivel

Alexander Hernández Quirós

1. En la figura adjunta los tres círculos son tangentes y tienen radio 2, $\square ABCD$ es un rectángulo con $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ y $\overline{DC}$ tangentes al círculo y C es el centro de uno de los círculos. Determine el área de la región sombreada.

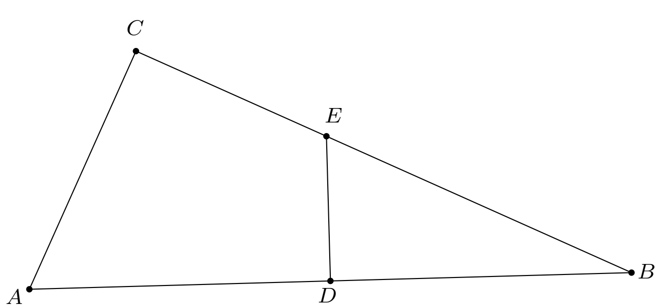


2. Sea el $\triangle ABC$ recto en B. Sobre los catetos $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$ se construyen exteriormente los triángulos equiláteros $\triangle ABE$ y $\triangle BCF$. Sean P el pie de la altura desde B al lado $\overline{AC}$, $D = \overleftrightarrow{PE} \cap \overleftrightarrow{AB}$ y $L = \overleftrightarrow{PF} \cap \overleftrightarrow{BC}$. Demuestre que $\overleftrightarrow{DL} \parallel \overleftrightarrow{EF}$.

3. En la figura adjunta, el ΔABC es recto en C, $B - E - C$, $\overline{DE} \perp \overline{AB}$ en D y D es el punto medio de $\overline{AB}$. Si $m = DB$ y $n = AC$,

   a) Compruebe que la razón entre las áreas de los triángulos ΔABC y ΔDBE está dada por $\dfrac{(ABC)}{(DBE)} = 4 - \dfrac{n^2}{m^2}$.

   b) Halle el área del $\square ADEC$ si $m = 10$ cm. y $n = 12$ cm.



4. Sea $\square PQRS$ un cuadrado y sea A un punto cualquiera en el plano. Justifique por qué se satisface la relación $AP < AQ + AR + AS$.

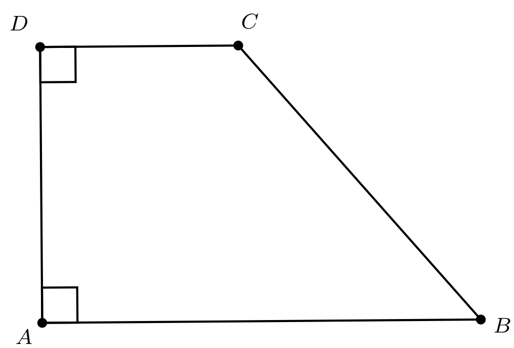
5. Considere el $\triangle ABC$ y sean E y F puntos, tales que $A - E - C$, $B - F - C$ y $\overline{EF} \| \overline{AB}$. Sean D y G puntos tales que $D - E - F - G$. Si $m\angle CAB = 2m\angle DCE$, $m\angle FCG + m\angle DCE = m\angle ABC$, $\dfrac{DG}{AB} = \dfrac{7}{3}$ y $\dfrac{AC}{DC} = \dfrac{5}{3}$, determine $\dfrac{DC}{EF}$.

6. Considere el rombo $ABCD$ con $\angle BAD = 60°$. Sean G y Z dos puntos distintos en el segmento AC y considere puntos E y X en $\overline{AD}$, F y Y en $\overline{DC}$, tales que $\square GEDF$ y $\square ZXDY$ son paralelogramos. Demuestre que $BEX \cong BFY$.

7. Sea L un punto en el interior de un $\triangle ABC$. Pruebe que

$$\frac{AB + BC + AC}{2} < LA + LB + LC < AB + BC + AC$$

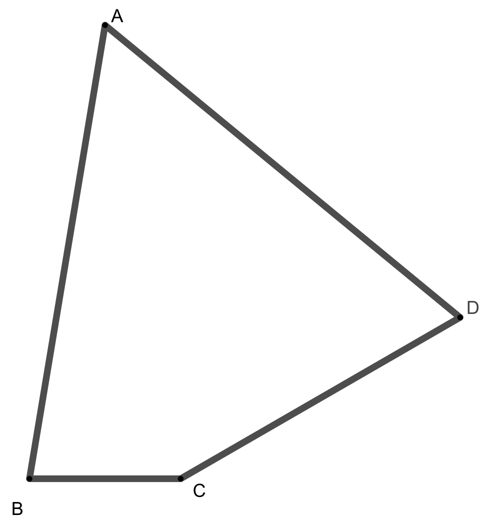
8. El cuadrilátero $ABCD$ de la figura adjunta, es tal que sus lados tienen longitudes enteras y su área es 686 cm^2. Si $AD = 28$ cm. y $CB = AB$, determine el perímetro del cuadrilátero.



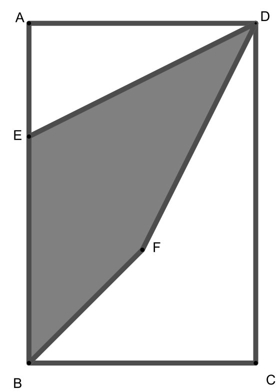
9. Si $\square ABCD$ es un trapecio de base mayor $\overline{CD}$ en el que O es el punto de intersección de $\overrightarrow{CB}$ y $\overrightarrow{DA}$, el punto E es el simétrico del punto B con respecto al punto O, el punto F es el simétrico del punto B con respecto al punto medio de $\overline{CD}$, el punto G es el simétrico del punto A con respecto al punto medio de $\overline{CE}$, y el punto H es el simétrico del punto A con respecto al punto O. Si $m\angle ADC = 60°$ y $m\angle BCD = 45°$, determine el valor de $m\angle CGF + m\angle CEA$.

10. Considere el $\triangle ABC$ en el que $AB = 7$ cm. Si M es un punto en $\overline{BC}$, tal que $BM = 5$ cm, $MC = 6$ cm. y $AM = 3$ cm, determine la medida de $\overline{AC}$.

11. Considere el $\square ABCD$ de la figura adjunta. Sea E un punto tal que $A - E - B$, $m\angle BEC = 30°$, $m\angle ABC = m\angle ACB = 80°$ y $\overline{AB} \cong \overline{BD} \cong \overline{AD}$. Demuestre que $\overline{EC} \cong \overline{CD}$.



12. Sea $\square ABCD$ un rectángulo, tal que $3AD = 2CD$. Sea E tal que $A - E - B$, $EB = BC$ y F punto medio de $\overline{EC}$. Determine qué razón del rectángulo $ABCD$ representa el área sombreada.



13. Considere el $\triangle ABC$, tal que $m\angle CAB = 45°$ y $m\angle CBA = 30°$. Sean D en $\overline{AB}$ y E en $\overline{AC}$, tales que $m\angle ADE = 60°$ y $\overline{DE}$ divide al $\triangle ABC$ en dos regiones con áreas iguales.

    Demuestre que $\left(\dfrac{AB}{AD}\right)^4 = 12$.