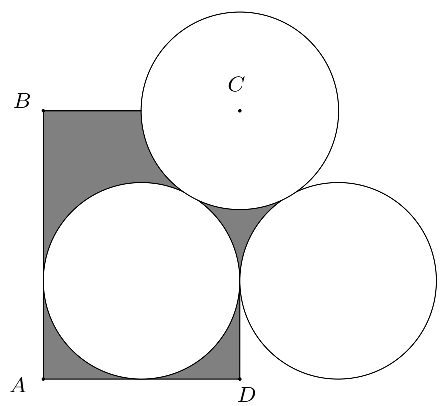
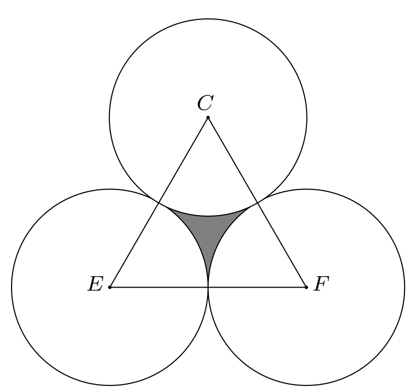
Geometría II Nivel
Alexander Hernández Quirós

1. En la figura adjunta los tres círculos son tangentes y tienen radio 2, $\square ABCD$ es un rectángulo con $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ y $\overline{DC}$ tangentes al círculo y C es el centro de uno de los círculos. Determine el área de la región sombreada.



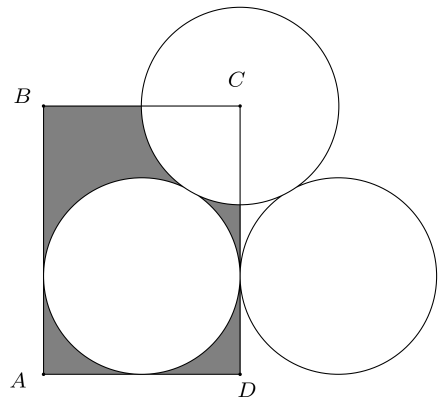
• Solución:

Calculemos primero el área de la región comprendida entre los tres círculos (A_1). Sean E, F los centros de los otros círculos.



$\triangle ECF$ es equilátero de lado 4, por lo que su altura es $2\sqrt{3}$ y su área es $A = 4\sqrt{3}$. El área sombreada corresponde al área del triángulo menos el área de tres sectores circulares, como el ángulo de cada uno de ellos es $60°$, entre los tres forman la mitad de un círculo, por lo que su área es $A_\circ = 2\pi$. Entonces el área sombreada es $A_1 = 4\sqrt{3} - 2\pi$

Consideremos ahora el área dentro del $\square ABCD$ y fuera de los círculos (A_2).

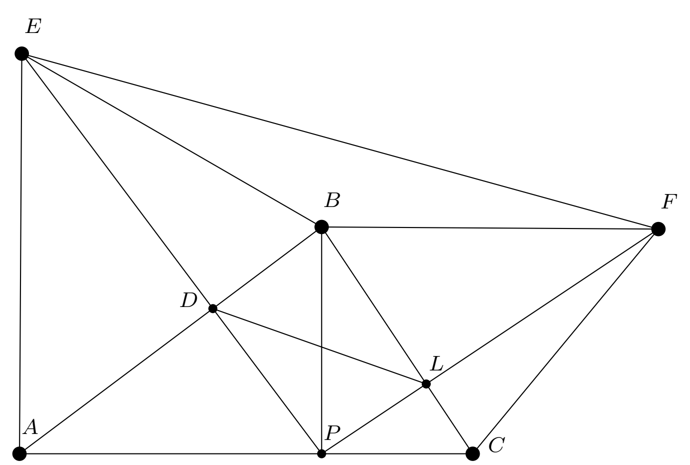


Observe que la medida de $\overline{DC}$ es la altura del $\triangle ECF$ más el radio del círculo, es decir, $DC = 2\sqrt{3} + 2$, además $AD = 4$, por lo que el $(ABCD) = 8\sqrt{3} + 8$. El área sombreada es el área del rectángulo menos el área de un círculo y menos la cuarta parte de otro círculo, es decir, $A_2 = 8\sqrt{3} + 8 - 5\pi$.

Finalmente se debe observar que A_2 incluye la mitad de A_1, por lo que el área sombreada total es $A_T = A_2 + \dfrac{1}{2}A_1 = 10\sqrt{3} + 8 - 6\pi$

2. Sea el $\triangle ABC$ recto en B. Sobre los catetos $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$ se construyen exteriormente los triángulos equiláteros $\triangle ABE$ y $\triangle BCF$. Sean P el pie de la altura desde B al lado $\overline{AC}$, $D = \overleftrightarrow{PE} \cap \overleftrightarrow{AB}$ y $L = \overleftrightarrow{PF} \cap \overleftrightarrow{BC}$. Demuestre que $\overleftrightarrow{DL} \parallel \overleftrightarrow{EF}$.

• Solución:



Note que $\angle PCB = 90° - \angle CBP = \angle PBA$.

Como $\angle BPA = \angle CPB$, por $A - A$, $\triangle BPC \sim \triangle APC \Rightarrow \dfrac{BC}{PC} = \dfrac{AB}{PB} \Rightarrow \dfrac{CF}{PC} = \dfrac{EB}{PB}$ (por ser triángulos equiláteros).

Además, como $\angle PCB = \angle PBA \Rightarrow \angle PCF = \angle PCB + 60 = \angle PBE$.

Por LAL, $\triangle PCF \sim \triangle PBE$, por lo cual $\angle FPC = \angle EPB$ y $\angle CFD = \angle BEP$.

Esto uno a que $\angle PCL = \angle PBD$ y que $\angle LCF = \angle DBE$, implica que $\triangle PCL \sim \triangle PBD$ y $\triangle LCF \sim \triangle DBE$.

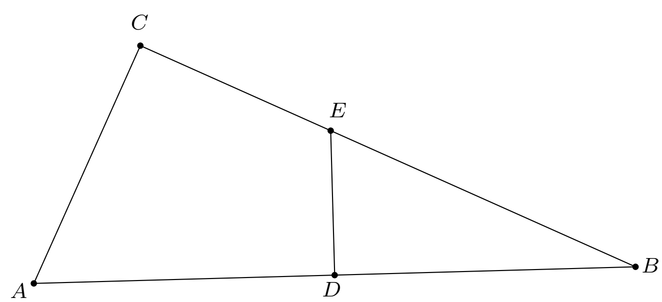
De donde $\dfrac{PL}{PD} = \dfrac{PC}{BP} = \dfrac{PF}{PE} \Rightarrow \overleftrightarrow{DL} \parallel \overleftrightarrow{EF}$.

Nota: Para la última igualdad se usó $\triangle PCL \sim \triangle PBD$ y $\triangle PCF \sim \triangle PBE$.

3. En la figura adjunta, el ΔABC es recto en C, $B - E - C$, $\overline{DE} \perp \overline{AB}$ en D y D es el punto medio de $\overline{AB}$. Si $m = DB$ y $n = AC$,

   a) Compruebe que la razón entre las áreas de los triángulos ΔABC y ΔDBE está dada por $\dfrac{(ABC)}{(DBE)} = 4 - \dfrac{n^2}{m^2}$.

   b) Halle el área del $\square ADEC$ si $m = 10$ cm. y $n = 12$ cm.



• Solución:

En el ΔABC se tiene que $AC = n$ y $AB = AD + DB = 2 \cdot DB = 2m$. Con base en el Teorema de Pitágoras, el otro cateto de este triángulo tiene medida $BC = \sqrt{(2m)^2 - n^2} = \sqrt{4m^2 - n^2}$.

Por lo anterior, el área A_1 del ΔABC está dada por $A_1 = \dfrac{1}{2} n \sqrt{4m^2 - n^2} = \dfrac{n\sqrt{4m^2 - n^2}}{2}$.

Los triángulos ΔABC y ΔEBD son semejantes por criterio ángulo–ángulo–ángulo, ya que comparten el ángulo del vértice B, poseen ambos un ángulo recto, en los vértices C y D respectivamente, por lo que los restantes ángulos agudos son de igual medida (los ángulos de vértices A y E). Así,

$$
\begin{aligned}
& \frac{ED}{AC} = \frac{BD}{BC} \\
\Rightarrow \quad & \frac{ED}{n} = \frac{m}{\sqrt{4m^2 - n^2}} \\
\Rightarrow \quad & ED = \frac{n\,m}{\sqrt{4m^2 - n^2}}
\end{aligned}
$$

Con lo anterior, el área A_2 del ΔDBE está dada por $A_2 = \dfrac{1}{2}m\dfrac{n\,m}{\sqrt{4m^2-n^2}} = \dfrac{n\,m^2}{2\sqrt{4m^2-n^2}}$.

Por lo tanto, la razón R entre las áreas de los triángulos ΔABC y ΔDEB está dada por:

$$
\begin{aligned}
R &= \frac{A_1}{A_2} \\
&= \frac{\dfrac{n\sqrt{4m^2-n^2}}{2}}{\dfrac{n\,m^2}{2\sqrt{4m^2-n^2}}} \\
&= \frac{2n\left(4m^2-n^2\right)}{2n\,m^2} \\
&= \frac{4m^2-n^2}{m^2} \\
&= \frac{4m^2}{m^2} - \frac{n^2}{m^2} \\
&= 4 - \frac{n^2}{m^2}
\end{aligned}
$$

El área del $\square ADEC$ está dada por:

$$
\begin{aligned}
(ADEC) &= (ABC) - (DBE) \\
&= \frac{12\sqrt{4\cdot 10^2 - 12^2}}{2} - \frac{12\cdot 10^2}{2\sqrt{4\cdot 10^2 - 12^2}} \\
&= 6\sqrt{4\cdot 100 - 144} - \frac{6\cdot 100}{\sqrt{4\cdot 100 - 144}} \\
&= 6\sqrt{256} - \frac{600}{\sqrt{256}} \\
&= 6\cdot 16 - \frac{600}{16} \\
&= 96 - \frac{75}{2} \\
&= \frac{192-75}{2} = \frac{117}{2}
\end{aligned}
$$

Así, el área del $\square ADEC$ es $\dfrac{117}{2} = 58{,}5$ cm^2.

4. Sea $\square PQRS$ un cuadrado y sea A un punto cualquiera en el plano. Justifique por qué se satisface la relación $AP < AQ + AR + AS$.

   • Solución:

   Considere el ΔAPR.

   Aplicando la desigualdad triangular en dicho triángulo se tiene que $AP < AR + PR$.

   Ahora, considere el ΔAQS.

   Aplicando la desigualdad triangular en dicho triángulo se tiene que $SQ < AS + AQ$.

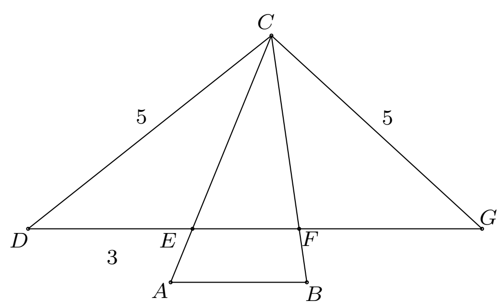
   Considerando las dos desigualdades anteriores, se tiene que $AP + SQ < AR + PR + AS + AQ$.

   Luego, dado que $SQ = PR$ (pues son las medidas de las diagonales del cuadrado) se tiene el resultado deseado $AP < AR + AS + AQ$.

5. Considere el $\triangle ABC$ y sean E y F puntos, tales que $A-E-C$, $B-F-C$ y $\overline{EF} \| \overline{AB}$. Sean D y G puntos tales que $D-E-F-G$. Si $m\angle CAB = 2m\angle DCE$, $m\angle FCG + m\angle DCE = m\angle ABC$, $\dfrac{DG}{AB} = \dfrac{7}{3}$ y $\dfrac{AC}{DC} = \dfrac{5}{3}$, determine $\dfrac{DC}{EF}$.

   Solución:

   Considere la figura:



   Sea $\alpha = m\angle DEC$, entonces $m\angle CAB = 2\alpha$.

   Sea $\beta = m\angle ABC$, entonces $m\angle FCG + \alpha = \beta \Rightarrow m\angle FCG = \beta - \alpha$

   $m\angle CEF = m\angle CAB = 2\alpha$ y $m\angle CFE \leq m\angle ABC = \beta$

   Luego $m\angle DEC = 180° - 2\alpha$ y $m\angle CFG = 180° - \beta$

   En $\triangle DEC$ $m\angle EDC + (180° - 2\alpha) + \alpha = 180° \Rightarrow m\angle EDC = \alpha$

   $\therefore \triangle DEC$ es isósceles con $DE = EC$

   En $\triangle GFC$ $m\angle FGC + 180° - \alpha + \beta - \alpha = 180° \Rightarrow m\angle FGC = \alpha$

   $\therefore \triangle DGC$ es isósceles con $DC = GC$

   $\triangle ABC \sim \triangle EFC \Rightarrow \dfrac{EF}{AB} = \dfrac{EC}{AC} \Rightarrow EC = AC \cdot \dfrac{EF}{AB}$

   $\triangle DBC \sim \triangle DCG \Rightarrow \dfrac{DE}{DC} = \dfrac{DC}{DB}$

   $\Rightarrow DC^2 = DE \cdot DG$

   $\Rightarrow DC^2 = EC \cdot DG$

$\Rightarrow DC^2 = AC \cdot \dfrac{EF}{AB} \cdot DG$

$\Rightarrow DC^2 = \dfrac{AC}{DC} \cdot EF \cdot \dfrac{DG}{AB}$

$\Rightarrow DC = \dfrac{5}{3} \cdot EF \cdot \dfrac{7}{3}$

$\Rightarrow \dfrac{DC}{EF} = \dfrac{35}{9}$

6. Considere el rombo $ABCD$ con $\angle BAD = 60°$. Sean G y Z dos puntos distintos en el segmento AC y considere puntos E y X en $\overline{AD}$, F y Y en $\overline{DC}$, tales que $\square GEDF$ y $\square ZXDY$ son paralelogramos. Demuestre que $BEX \cong BFY$.

   Solución:

   Se va a mostrar que $BE = BF$.

   Note que EG paralela a DF así se tiene que $\angle GAE = \angle ACD = \angle AGE$, de donde $AE = FG = DF$.

   Note que $\triangle ABD$ es equilátero, así $BA = BD$, y además $\angle BDF = 60 = \angle BAE$.

   Por criterio de congruencia L.A.L se concluye que $\triangle BAE$ y $\triangle BDF$ son congruentes, por lo que $BE = BF$.

   Análogamente $\triangle BAX$ y $\triangle BDY$ son congruentes y $BX = BY$.

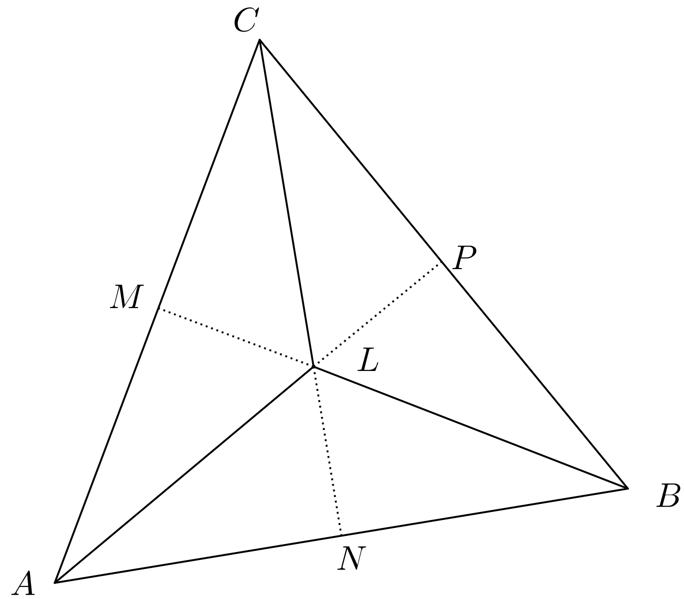
   Note que $\angle EBX = \angle ABX - \angle ABE = \angle DBY - \angle DBF = \angle FBY$ y como $BE = BF$, $BX = BY$ se tiene por criterio de congruencia L.A.L que $\triangle BEX \cong \triangle BFY$.

7. Sea L un punto en el interior de un $\triangle ABC$. Pruebe que

$$\frac{AB + BC + AC}{2} < LA + LB + LC < AB + BC + AC$$

   Solución:

   De acuerdo con la información dada, se obtiene la siguiente figura:



Por el triángulo ALB y la desigualdad triangular se obtiene que $LA+LB > AB$. Análogamente, $LB + LC > BC$ y $LA + LC > AC$.

La primera desigualdad se obtiene al sumar los respectivos lados de las tres desigualdades encontradas anteriormente. Es decir;

$LA + LB + LB + LC + LA + LC > AB + BC + AC \Rightarrow \dfrac{AB + BC + AC}{2} < LA + LB + LC.$

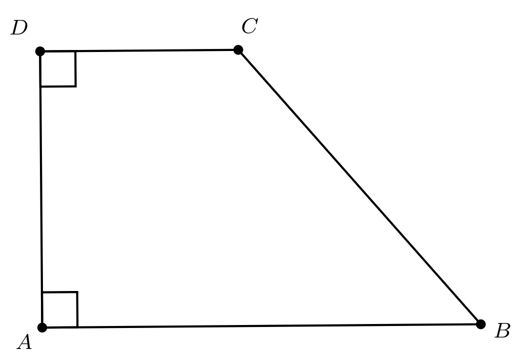
Para probar la segunda desigualdad ($LA + LB + LC < AB + BC + AC$), se prolonga el $\overline{BL}$ y se interseca con el $\overline{AC}$ en el punto M. Luego, $AB + AC = AB + AM + MC > BM + MC = LB + LM + MC > LB + LC \Rightarrow AB + AC > LB + LC$.

Análogamente, $AC + BC > LA + LB$ (al prolongar el $\overline{CL}$ y se interseca con el $\overline{AB}$ en el punto N) y $AB + BC > LA + LC$ (al prolongar el $\overline{AL}$ y se interseca con el $\overline{BC}$ en el punto P).

Se obtiene la segunda desigualdad, al sumar los respectivos lados de las tres desigualdades encontradas anteriormente. Es decir;

$AB + AC + AC + BC + AB + BC > LB + LC + LA + LB + LA + LC \Rightarrow LA + LB + LC < AB + BC + AC.$

8. El cuadrilátero $ABCD$ de la figura adjunta, es tal que sus lados tienen longitudes enteras y su área es 686 cm^2. Si $AD = 28$ cm. y $CB = AB$, determine el perímetro del cuadrilátero.



Solución:

Sean $CD = y$, $CB = AB = x$.

Considere el segmento CE perpendicular al segmento AB en E.
Se tiene que $AE = y$, $EB = x - y$.

Como $AD = 28$, se tiene que $CE = 28$.

Como el área del cuadrilátero mide 686, se tiene que $28y + \dfrac{28(x-y)}{2} = 686$. Luego, $y = 49 - x$.

Por otra parte, por el teorema de Pitágoras, se tiene que $28^2 + (x-y)^2 = x^2$, de donde $784 + (x - 49 + x)^2 = x^2$. Luego, $3x^2 - 196x + 3185 = 0$.

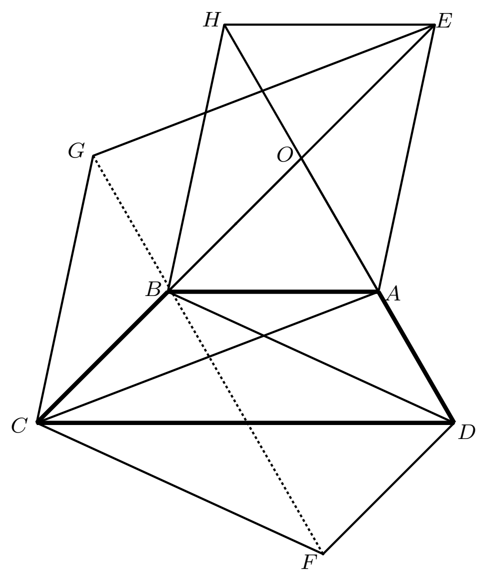
Se tiene que $x = 35$ o $x = \dfrac{91}{3}$.
Debido a que el cuadrilátero tiene lados de longitud entera, $x = 35$. Luego, $y = 14$.

Las longitudes de las medidas de los lados son 28, 14 y 35. Y el perímetro del cuadrilátero mide $28 + 14 + 2 \cdot 35 = 112$.

9. Si $\square ABCD$ es un trapecio de base mayor $\overline{CD}$ en el que O es el punto de intersección de $\overrightarrow{CB}$ y $\overrightarrow{DA}$, el punto E es el simétrico del punto B con respecto al punto O, el punto F es el simétrico del punto B con respecto al punto medio de $\overline{CD}$, el punto G es el simétrico del punto A con respecto al punto medio de $\overline{CE}$, y el punto H es el simétrico del punto A con respecto al punto O. Si $m\angle ADC = 60°$ y $m\angle BCD = 45°$, determine el valor de $m\angle CGF + m\angle CEA$.

   Solución:

   Considere la siguiente figura:



   Como $\overline{AH}$ y $\overline{BE}$ se intersecan en su punto medio y corresponden a las diagonales de $\square ABHE$, entonces dicho cuadrilátero es un paralelogramo. Igualmente ocurre con $\square ACGE$ y $\square BCFD$.

   Se tiene entonces que los segmentos $\overline{CG}$, $\overline{AE}$ y $\overline{BH}$ son paralelos y congruentes, lo mismo que $\overline{CF}$ y $\overline{BD}$, entonces $\angle GCF \cong \angle HBD$ y $\triangle GCF \cong \triangle HBD$.

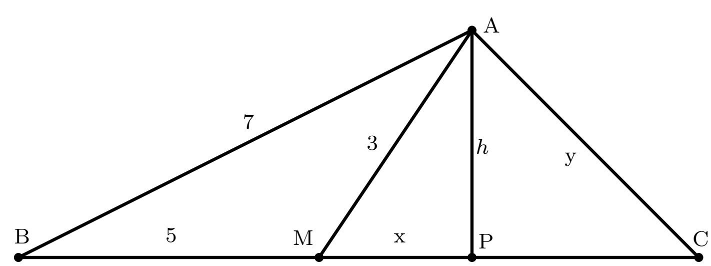
   De esto se tiene que $\angle CGF \cong \angle BHA$, pero también $\angle BHA \cong \angle HAE$ (alternos internos entre paralelas). Entonces $m\angle CGF + m\angle CEA = m\angle HAE + m\angle CEA$.

   Como $m\angle ADC = 60°$ y $m\angle BCD = 45°$, entonces $m\angle COD = 75°$ y $m\angle HAE + m\angle CEA = 75°$ (por teorema del ángulo externo en $\triangle AOE$).

10. Considere el $\triangle ABC$ en el que $AB = 7$ cm. Si M es un punto en $\overline{BC}$, tal que $BM = 5$ cm, $MC = 6$ cm. y $AM = 3$ cm, determine la medida de $\overline{AC}$.

   Solución:

   Sabemos que $\triangle AMB$ es obtuso pues $7^2 > 3^2 + 5^2$. Si P es el pie de la perpendicular desde A sobre $\overline{BC}$, entonces P está entre M y C.



Sean x, y, h como en la figura. Aplicando el teorema de Pitágoras en los triángulos $\triangle APB$ y $\triangle APM$

$$(x+5)^2 + h^2 = 7^2 \text{ y } h^2 = 3^2 - x^2$$

Sustituyendo la segunda ecuación en la primera

$$(x+5)^2 + 3^2 - x^2 = 7^2 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

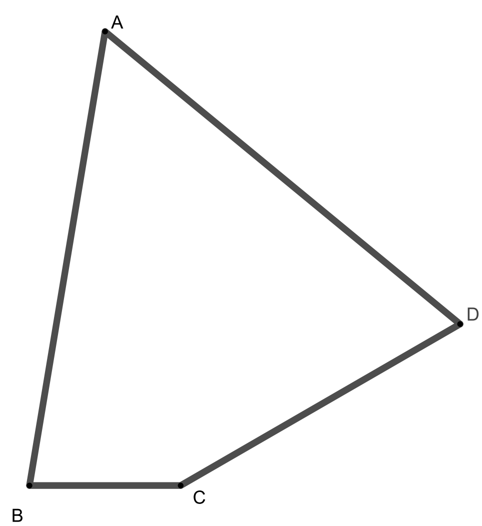
$$h = \sqrt{3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{27}}{2}$$

Como $MC = 6$ cm, entonces $PC = 6 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$ cm.
Ahora en el $\triangle APC$

$$y^2 = \left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{27}}{2}\right)^2 = 27$$

Por lo tanto, $y = \sqrt{27}$ cm.

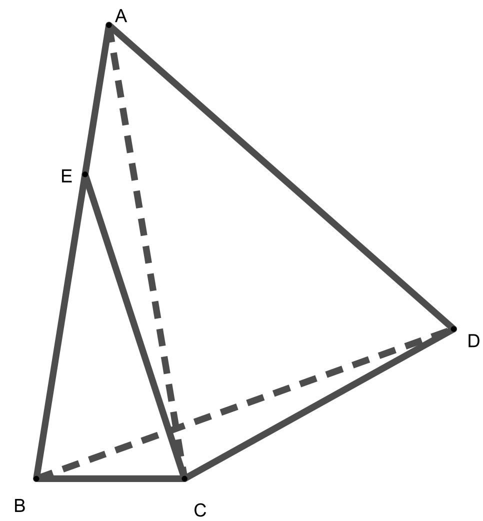
11. Considere el $\square ABCD$ de la figura adjunta. Sea E un punto tal que $A - E - B$, $m\angle BEC = 30°$, $m\angle ABC = m\angle ACB = 80°$ y $\overline{AB} \cong \overline{BD} \cong \overline{AD}$. Demuestre que $\overline{EC} \cong \overline{CD}$.



Solución:

Se probará que $\triangle AEC \cong \triangle BCD$

Como $\overline{AB} \cong \overline{BD} \cong \overline{AD}$ entonces el $\triangle ABD$ es equilátero y $m\angle ABC = m\angle BDA = M\angle DAB = 60°$.
Dado que $m\angle ABC = m\angle ACB = 80°$ entonces $m\angle BAC = 20°$.
Si $m\angle BEC = 30°$ entonces $m\angle AEC = 150°$ y $m\angle ECA = 10°$.
Si $m\angle BAC = 20°$ y $m\angle BDA = 60°$ entonces $m\angle CAD = 40°$.
En el $\triangle ABC$ se tiene que $m\angle ABC = m\angle ACB = 80°$, por lo tanto $\triangle ABC$ es isósceles. Así, $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.
Del eneunciado se tiene que $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ y del paso anterior $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, entonces $\overline{AC} \cong \overline{AD}$. Por lo tanto $\triangle ACD$ también es isósceles.

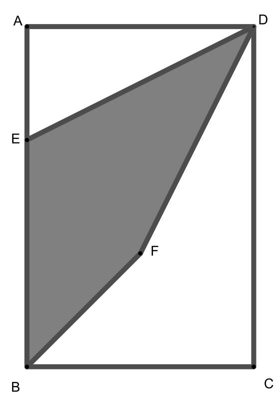


Como $\triangle ACD$ es isósceles y $m\angle CAD = 40°$ entonces $m\angle ACD = m\angle CDA = 70°$.

Luego $m\angle BDC = 10°$, $m\angle DBC = 20°$ y $m\angle BCD = 150°$.

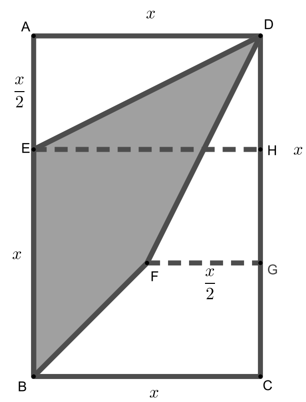
Finalmente, como $\overline{AC} \cong \overline{BD}$, por criterio de congruencia $a.l.a$ se tiene que $\triangle AEC \cong \triangle BCD$, del cual se deduce que $\overline{EC} \cong \overline{CD}$.

12. Sea $\square ABCD$ un rectángulo, tal que $3AD = 2CD$. Sea E tal que $A - E - B$, $EB = BC$ y F punto medio de $\overline{EC}$. Determine qué razón del rectángulo $ABCD$ representa el área sombreada.



Solución:

Sea $AD = x$ entonces $CD = \dfrac{3x}{2}$, luego $(ABCD) = \dfrac{3x^2}{2}$. Ahora determinemos el área sombreada. Consideremos la figura adjunta.



Como F es el punto medio de $\overline{EC}$ entonces F es el centro del cuadrado $EBCH$, por lo tanto $FG = \dfrac{x}{2}$. Así, $(ADE) = (FGD) = \dfrac{x \cdot \dfrac{x}{2}}{2} = \dfrac{x^2}{4}$.

Por otra parte, $(BCGF) = \dfrac{(x + \dfrac{x}{2}) \cdot \dfrac{x}{2}}{2} = \dfrac{\dfrac{3x}{2} \cdot \dfrac{x}{2}}{2} = \dfrac{3x^2}{8}$.

Luego, el área sombreada corresponde a: $A_s = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{3x^2}{8} = \dfrac{5x^2}{8}$.

Finalmente, la razón r de las áreas está dado por: $r = \dfrac{\dfrac{5x^2}{8}}{\dfrac{3x^2}{2}} = \dfrac{10}{24} = \dfrac{5}{12}$.

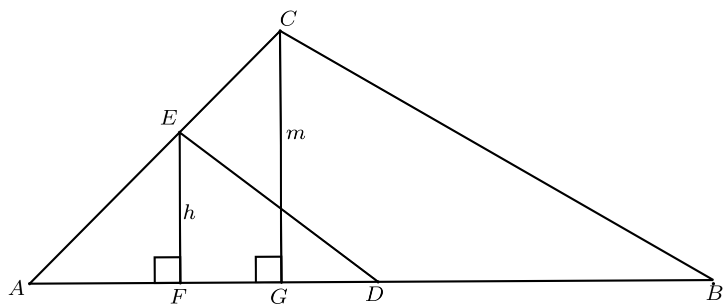
13. Considere el $\triangle ABC$, tal que $m\angle CAB = 45°$ y $m\angle CBA = 30°$. Sean D en $\overline{AB}$ y E en $\overline{AC}$, tales que $m\angle ADE = 60°$ y $\overline{DE}$ divide al $\triangle ABC$ en dos regiones con áreas iguales.

Demuestre que $\left(\dfrac{AB}{AD}\right)^4 = 12$.

Solución:

Considere la figura en la que están las alturas h del $\triangle AED$ y m del $\triangle ACB$, trazadas desde E y C, respectivamente.

Dado que $m\angle CAG = 45°$ y $\triangle ACG$ es rectángulo, entonces $m\angle ACG = 45°$ y $AG = m$. Para el $\triangle AEF$ (que es también triángulo rectángulo isósceles) con argumentos similares se llega a que $AF = h$.



En el $\triangle CGB$, dado que $m\angle CBG = 30°$ y este triángulo es rectángulo, se concluye que $m\angle GCB = 60°$; para este triángulo especial $30°-60°-90°$ se concluye que $GB = m\sqrt{3}$.

En el $\triangle EFD$ (que también es un triángulo especial $30° - 60° - 90°$), se tiene que $FD = \dfrac{h}{\sqrt{3}}$.

Así, el valor numérico de $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AG+GB}{AF+FD} = \dfrac{m+m\sqrt{3}}{h+\dfrac{h}{\sqrt{3}}} = \dfrac{m\left(1+\sqrt{3}\right)}{h\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)} = \dfrac{m}{h}\sqrt{3}$ $\qquad (*)$

Las áreas de los triángulos $\triangle AED$ y $\triangle ACB$ están dadas por:

$$(AED) = \frac{AD \cdot h}{2} = \frac{h\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot h}{2} = h^2\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$$

$$(ACB) = \frac{AB \cdot m}{2} = \frac{m\left(1+\sqrt{3}\right)\cdot m}{2} = m^2\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

Como $\overline{DE}$ divide al $\triangle ACB$ es dos regiones de igual área, se tiene que:

$$\begin{aligned}
&(ACB) = 2\,(AED)\\
&m^2\frac{1+\sqrt{3}}{2} = 2h^2\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\\
&m^2 = 2h^2\frac{1}{\sqrt{3}}\\
&\frac{m^2}{h^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\\
&\frac{m}{h} = \sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt[4]{12}}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

Sustituyendo este último resultado en $(*)$, se tiene: $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{m}{h}\sqrt{3} = \dfrac{\sqrt[4]{12}}{\sqrt{3}}\sqrt{3} = \sqrt[4]{12}$.

Por lo tanto, $\left(\dfrac{AB}{AD}\right)^4 = 12$.