Principio del palomar y teoría elemental de grafos

Entrenamiento para el Nivel II de la final nacional

Marianne Peña Wüst

2 de noviembre del 2019

1. Principio del palomar

El **Principio del palomar**, también conocido como el Principio de Dirichlet o el Principio de las casillas (o cajas), es una idea trivial que tiene mucha utilidad en problemas olímpicos. Es una técnica propia de la rama de la Combinatoria, pero también se puede utilizar en problemas de Teoría de números, Geometría e incluso Álgebra.

Su curioso nombre se debe a que supuestamente cuando el Principio fue enunciado por primera vez, se utilizó el ejemplo de las "palomas y los palomares" para facilitar su comprensión. El principio afirma lo siguiente:

Principio 1.1 (Principio del palomar). Si se colocan $n+1$ palomas en n palomares, entonces debe haber al menos un palomar que contenga mínimo dos palomas.

Su versión generalizada se encuentra a continuación:

Principio 1.2 (Versión generalizada o "fuerte" del Principio del palomar). Si se colocan n palomas en k palomares, con $n > k$, entonces debe haber al menos un palomar que contenga mínimo $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ palomas.

*Nota: $\lceil m \rceil = l$ si $l \in \mathbb{Z} \ \wedge \ l - 1 < m \leq l$. En palabras simples, l es el entero más pequeño que es mayor o igual que m. Esta notación es conocida coloquialmente como *función techo*.

Nótese que cualquier objeto puede ser una "paloma" y cualquier categoría puede ser un "palomar". Por ende, lo primero que se tiene que hacer al querer utilizar este principio en una solución es definir **cuáles son las "palomas"** y **cuáles son los "palomares"** del problema.

Ejemplo 1.1 Demuestre que si se toman 367 seres humanos aleatorios habrá al menos dos con el mismo cumpleaños.
Solución Tome a los seres humanos escogidos como "palomas" y las posibles fechas de cumpleaños como los "palomares". Note que hay 366 fechas posibles (del 1 de enero al 31 de diciembre, incluyendo el 29 de febrero) y 367 seres humanos, entonces por el Principio del palomar al menos dos tienen el mismo cumpleaños. ■

Ejemplo 1.2 Demuestre que si se toman cinco enteros entre el 1 y el 8 (inclusive), habrá obligatoriamente un par de ellos que sumen 9.
Solución Note que hay cuatro pares de enteros entre 1 y 8 que suman 9: (1, 8), (2, 7), (3, 6) y (4, 5). Tome estos pares como los "palomares" y los cinco números tomados como las "palomas". Por el Principio del palomar, tiene que haber al menos dos números que pertenezcan al mismo par. ■

Ejemplo 1.3 Sea Q un conjunto con $n+1$ números enteros. Demuestre que existen $a, b \in Q$ tales que $a-b$ es múltiplo de n.
Solución: Considere los residuos de la división entre n como los "palomares" y los elementos del conjunto Q como las "palomas". Como Q tiene $n+1$ elementos y solo existen n residuos diferentes al dividir entre n, por el Principio del palomar existen a y b tales que ambos tienen el mismo residuo al dividirlos entre n. Es decir, $a = l_1 n + m$ y $b = l_2 n + m$, con $l_1, l_2, m \in \mathbb{Z}$. Entonces, $a - b = l_1 n + m - l_2 n - m = l_1 n - l_2 n = (l_1 - l_2)n$, que claramente es múltiplo de n. ■

2. Teoría (muy) elemental de grafos

Una definición geométrica, informal y simple es que un **grafo** es "un conjunto de puntos [**vértices**] en el espacio, algunos de los cuales están unidos entre sí mediante líneas [**aristas**]".[1] Se puede definir más formalmente recurriendo al álgebra: "un grafo G se define como un par ordenado $G = (V, E) = (V(G), E(G))$, donde V es un conjunto no vacío de puntos del espacio topológico, también conocidos como vértices o nodos, y E es un conjunto de pares no ordenados de elementos distintos de V, demoninados lados, líneas o aristas".[1]

Por ahora no es necesario profundizar más en el tema, ya que solo lo aplicaremos en problemas "elementales" del Principio del palomar. Con este fin es útil conocer una técnica que veremos en la prueba del siguiente teorema.

Teorema 2.1 (Teorema de la amistad) En un conjunto de seis personas existe un grupo de tres humanos que o se conocen todos entre sí o que no se conocen todos entre sí.
Prueba: Visualice un grafo en el que los vértices representan las seis personas y las aristas representan que se conocen. Considere uno de esos vértices y note que se puede conectar con cinco otros vértices. Por el Principio del palomar, tomando los cinco vértices como las "palomas " y la relación que tienen (se conocen o no) como los "palomares ", el punto elegido conoce al menos tres de los otros puntos o no conoce tres de los otros puntos. Considerando el caso en el que conoce a estos tres puntos, si alguno de estos tres conoce a otro del grupo, ya se cumple el enunciado. Sin embargo, si ninguno de los tres está conectado, entonces existe un grupo de tres personas que no se conoce y también se cumple el enunciado. En el caso de que el vértice elegido no conozca a los otros tres, se procede de manera análoga. ■

**Dato curioso*: Este teorema pertenece a un área de la matemática llamada *Teoría de Ramsey*, que es un poco avanzada para este documento pero que la persona lectora puede perfectamente investigar.

3. Problemas

3.1 Mostrar que en una fiesta siempre existen dos personas que han saludado a la misma cantidad de personas.

3.2 Se escogen seis enteros positivos entre 1 y 2018. ¿Cuál es la probabilidad de que algún par de estos enteros tenga como diferencia un múltiplo de 5?

3.3 Un restaurante trabaja seis días a la semana, con turnos de mañana y de tarde. El restaurante tiene 13 empleados o empleadas. Demuestre que hay mínimo dos personas empleadas con el mismo turno.

[1] Menéndez, A. (Junio 1998). Una breve introducción a la teoría de grafos. Revista Suma, 28, 11-26. 2019, octubre 30, de https://revistasuma.es/IMG/pdf/28/011-026.pdf

3.4 Hay un grupo de seis personas con diferente lengua nativa, pero algunos hablan francés y otros no. Se cumple que en cualquier tripleta de personas que se elija hay al menos dos que pueden hablarse. Marianne afirma que entonces siempre se puede hacer una conversación de tres personas. ¿Tiene ella la razón? Justifique.

3.5 (Banco de problemas Nivel B, 2011) Un conjunto está formado por 17 enteros positivos tales que ninguno de ellos tiene un factor primo mayor que 7. Demuestre que existen dos números de ese conjunto cuyo producto es un cuadrado perfecto.

3.6 (OLCOMA Nivel II 2016, 5) En una galaxia muy lejana hay n Jedis (guardianes de la paz de la galaxia) sentados alrededor de una mesa, en forma de polígono regular. Sobre la mesa cada uno tiene un sable de luz con su nombre respectivo escrito en él. En un momento, un malvado Sith desordena los sables de luz, de manera tal que cada Jedi todavía tiene un sable de luz al frente, pero nadie tiene el que le pertenece. Por suerte uno de ellos rápidamente diseña un plan y descubre que si se gira la mesa hasta cierto punto, dos de los sables estarán al frente de sus respectivos dueños. Demuestre que este Jedi tiene razón.