OLIMPIADAS COSTARRICENSES DE MATEMÁTICA
CAPACITACIÓN II ELIMINATORIA 2019
I NIVEL. TEMA: Geometría
DÍA 1. Sesión de la mañana

Enunciados y soluciones de los problemas

Selección única

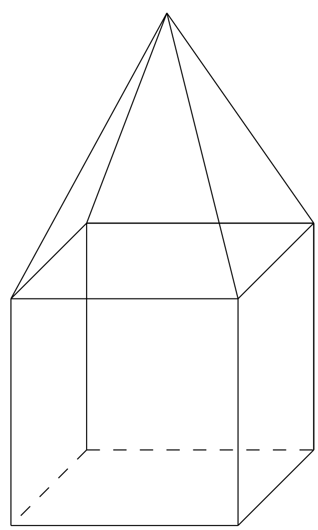
1. (IIE, IN, 2015) Considere la figura sólida que se obtiene al construir una pirámide sobre la cara superior de un cubo, de forma que la base de la pirámide es la cara del cubo. Al sumar el número de caras, aristas y vértices que tiene en total esta figura se obtiene

   (a) 30
   (b) 33
   (c) 34
   (d) 35

   Solución:

   Opción correcta: Opción c)

   El sólido tiene: 9 caras: 5 del cubo y 4 de la pirámide
   16 aristas: 12 del cubo y 4 de la pirámide
   9 vértices: 8 del cubo y 1 de la pirámide

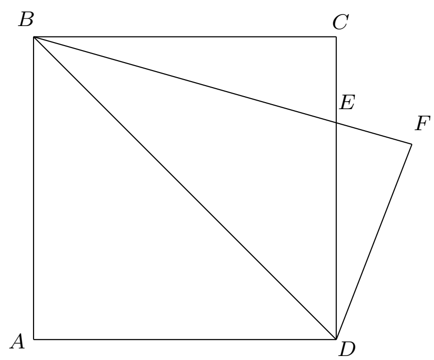


2. (IIE, IN, 2015) Sea $\square ABCD$ un cuadrado y E un punto en $\overline{CD}$ tal que $m\angle CBE = 18°$. Si se traza una recta perpendicular a $\overleftrightarrow{BE}$ por D y llamamos F al punto de intersección de esta recta con $\overleftrightarrow{BE}$, entonces la medida de $\angle EDF$ es

   (a) $18°$
   (b) $27°$
   (c) $45°$
   (d) $72°$

   Solución:

   Respuesta correcta: Opción a)

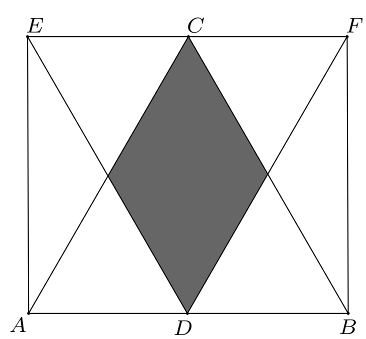


   Como $\triangle BCE$ es rectángulo y $m\angle CBE = 18°$ se tiene que $m\angle CEB = 72°$. Además $m\angle DEF = m\angle CEB$ por ser opuestos por el vértice.

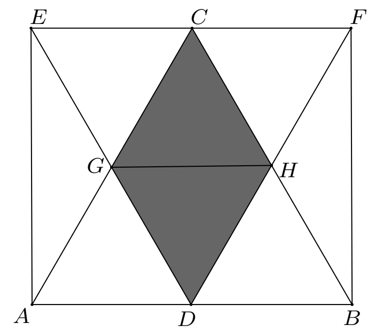
   Entonces, como $\triangle EFD$ es rectángulo y $m\angle DEF = 72°$ se tiene que $m\angle EDF = 18°$.

3. (IIE, IN, 2017) En la figura adjunta los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ son equiláteros, $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$, C es el punto medio de $\overline{EF}$ y D es el punto medio de $\overline{AB}$. La razón entre el área de la región sombreada y el área del $\square AEFB$ es

   (a) $\frac{1}{5}$
   (b) $\frac{1}{4}$
   (c) $\frac{1}{3}$
   (d) $\frac{2}{5}$



- Opción correcta: b
- Solución:



Sean G y H los puntos de intersección de $\overline{AC}$ con $\overline{ED}$ y $\overline{DF}$ con $\overline{BC}$ respectivamente.

Observe que al trazar $\overline{GH}$, el $\triangle ABC$ queda dividido en 4 triángulos de igual área, al igual que $\triangle DEF$. Es decir que las áreas de $\triangle EGC$ y $\triangle CFH$, juntas,son iguales que el área sombreada; al igual que las de los $\triangle ADG$ y $\triangle BDH$.

Por otra parte, $\square CDBF$ y $\square EADC$ son rectángulos cuyas diagonales se intersecan en en el punto medio. Con esto se tiene que $\triangle CDH$ y $\triangle BFH$ tienen igual área (pues tienen bases y alturas de igual medida) al igual que $\triangle AEG$ y $\triangle CDG$. Es decir que las áreas de $\triangle AEG$ y $\triangle BFH$, juntas, son iguales que el área sombreada.

$\therefore \dfrac{\text{área sombreada}}{(AEFB)} = \dfrac{1}{4}$

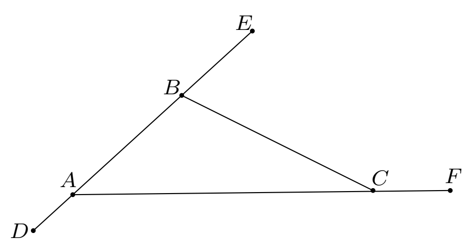
4. (IIE, IN, 2016) En la figura adjunta se tiene que $m\angle EBC$ es $20°$ menor que $m\angle DAC$. Si $m\angle BCF = 120°$, entonces $m\angle BAC$ es

   (a) $50°$

   (b) $60°$

   (c) $70°$

   (d) $80°$



- Opción correcta: $a)$
- Solución:

Llamemos $m\angle EBC = \alpha$, entonces $m\angle DAC = \alpha + 20°$ y $m\angle ABC = 180° - \alpha$

Como $m\angle BCF = 120°$, se tiene que $m\angle BCA = 60°$.

Por teorema del ángulo externo:

$m\angle DAC = m\angle ABC + m\angle BCA \Rightarrow \alpha + 20° = 180° - \alpha + 60° \Rightarrow 2\alpha = 220° \Rightarrow \alpha = 110°$

Luego, $m\angle DAC = 130°$ y $m\angle BAC = 50°$.

5. (IIE, IN, 2016) En un cuadrado $ABCD$, E es un punto en $\overline{BC}$, tal que $m\angle BAE$ es la mitad de $m\angle DAE$. Si F es el punto de intersección de $\overline{AE}$ con $\overline{DB}$ y G es el pie de la perpendicular a $\overline{DC}$ desde F, entonces la medida de $\angle GFE$ es

   (a) $40°$

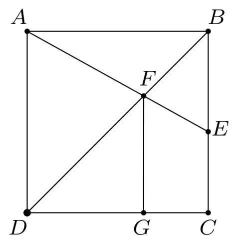
   (b) $45°$

   (c) $60°$

   (d) $70°$

- Opción correcta: c)
- Solución:

  Consideremos la siguiente figura



Como $m\angle BAD = 90°$ y $m\angle BAE$ es la mitad de $m\angle DAE$, se tiene que $m\angle BAE = 30°$ y $m\angle DAE = 60°$.

Por otro lado, como $\overline{FG} \perp \overline{DC}$, entonces$\overline{FG} \| \overline{AD}$ y entonces $\angle DAF$ y $\angle GFE$ son congruentes por ser correspondientes entre paralelas. Por lo tanto $m\angle GFE = 60°$.

6. (IIE, IN, 2016) Considere un $\triangle ABC$ isósceles con $AB = BC$, donde E es un punto en $\overline{AB}$ y D un punto en $\overline{BC}$, tales que $\overline{ED} \perp \overline{BC}$. Si $AE = DE$, entonces $m\angle DAC$ es

   (a) 30º

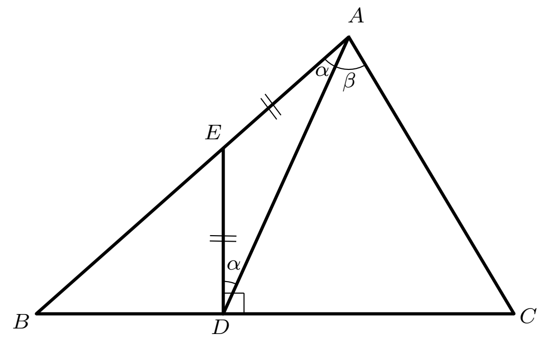
   (b) 45º

   (c) 60º

   (d) 75º

- Opción correcta: b)
- Solución:

Como $AE = DE$ entonces $m\angle EDA = m\angle EAD = \alpha$.
Sea $m\angle DAC = \beta$, así $m\angle EAC = m\angle ACD = \alpha + \beta$
$m\angle ADC = 90° - m\angle EDA = 90° - \alpha$.
En el $\triangle ADC$ tenemos:
$m\angle ACD + m\angle ADC + m\angle DAC = 180°$
$\alpha + \beta + 90° - \alpha + \beta = 180°$
$2\beta = 90°$
$\beta = 45°$
Por lo tanto, $m\angle DAC = 45°$

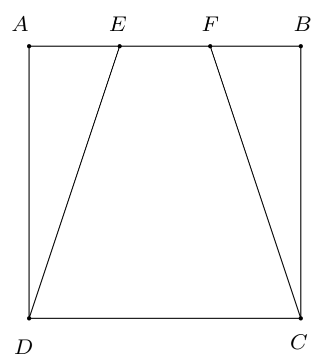


7. (IIE, IN, 2016) Sean $\square ABCD$ un cuadrado, E y F puntos en $\overline{AB}$, tales que $AE = EF = FB$. La razón entre el área de $\square ABCD$ y el área de $\square EDCF$ es

   (a) $\frac{4}{3}$
   (b) $\frac{3}{2}$
   (c) 2
   (d) $\frac{5}{2}$

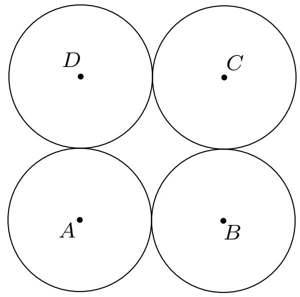
- Opción correcta: b)
- Solución:

  Si x es la medida del lado del cuadrado, su área es x^2, mientras que $\square EDCF$ como es un trapecio su área corresponde a $x\frac{\left(x+\frac{x}{3}\right)}{2} = x^2\frac{\left(1+\frac{1}{3}\right)}{2} = \frac{\frac{4}{3}x^2}{2} = \frac{2}{3}x^2$.
  Por lo tanto, la razón de las áreas es
  $\frac{x^2}{\frac{2}{3}x^2} = \frac{3}{2}$



8. (IIE, IN, 2017) En la figura adjunta se muestran cuatro círculos tangentes de igual radio y de centros A, B, C y D, respectivamente (el único punto que comparten las circunferencias de centros D y C, por ejemplo, es el punto medio de $\overline{DC}$). Si la medida del radio de cada círculo es 6 cm, entonces el área en cm^2 del $\square ABCD$ es

   (a) 24
   (b) 36
   (c) 48
   (d) 144



- Opción correcta: d
- Solución:

  Cada círculo tiene radio 6 cm.

  Los círculos de centros A y B, respectivamente, forman el lado $\overline{AB}$ cuya medida es 12 cm.

  De igual manera, $AD = DC = CB = AB$.

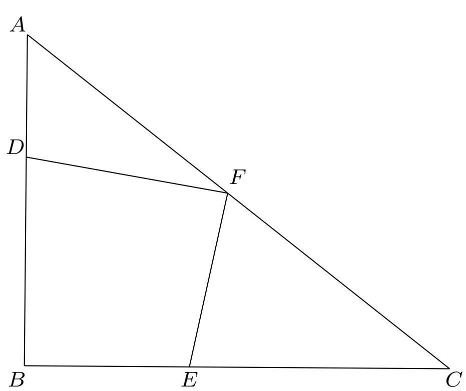
  El $\square ABCD$ es un cuadrado ya que son tangentes las circunferencias. De esta forma, se tiene $12 \cdot 12$ como área del $\square ABCD$.

9. (IIE, IN, 2015) Sea $\triangle ABC$ recto en B. Si D es un punto en $\overline{AB}$ tal que $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{1}{2}$, E es un punto en $\overline{BC}$ tal que $\dfrac{BE}{EC} = \dfrac{2}{3}$ y F es el punto medio de $\overline{AC}$, entonces $\dfrac{(BDFE)}{(ABC)}$ es

   (a) $\dfrac{2}{3}$
   (b) $\dfrac{3}{5}$
   (c) $\dfrac{4}{15}$
   (d) $\dfrac{8}{15}$

   Solución:

   Respuesta correcta: Opción d)



Llamemos $BC = 5x$ y $AB = 3y$, de modo que $BE = 2x$, $EC = 3x$, $AD = y$ y $DB = 2y$
Vemos que $(BDFE) = (ABC) - (ADF) - (EFC)$
Además $(EFC) = \dfrac{1}{2} \cdot 3x \cdot \frac{3}{2}y = \dfrac{9}{4}xy$, $(ADF) = \dfrac{1}{2} \cdot y \cdot \frac{5}{2}x = \dfrac{5}{4}xy$ y $(ABC) = \dfrac{1}{2} \cdot 5x \cdot 3y = \dfrac{15}{2}xy$

Entonces $(BDFE) = \dfrac{15}{2}xy - \dfrac{5}{4}xy - \dfrac{9}{4}xy = 4xy$

Por lo tanto $\dfrac{(BDFE)}{(ABC)} = \dfrac{8}{15}$

10. (IIE, IN, 2017)Considere un cuadrado $\square ABCD$ y un triángulo equilátero $\triangle BEC$. Este triángulo se divide en cuatro triángulos equiláteros y uno de estos se divide de nuevo en cuatro triángulos equiláteros más. Si el área de uno de los triángulos equiláteros resultantes de la última división es $x^2\sqrt{3}$, entonces el perímetro del polígono de vértices A, B, E, C y D es

    (a) $8x$

    (b) $20x$

    (c) $24x$

    (d) $40x$

- Opción correcta: d
- Solución:

  Si y denota la medida del lado de uno de los triángulos equiláteros resultantes de la última división, cuya área mide $x^2\sqrt{3}$, entonces $x^2\sqrt{3} = \dfrac{y^2\sqrt{3}}{4}$ y $y = 2x$.

  Luego, la medida del lado de cada uno de los triángulos equiláteros resultantes de la última división es $2x$.

  La medida del lado de cada uno de los triángulos equiláteros resultantes de la primera división es $4x$.

  La medida del lado del triángulo equilátero $\triangle BEC$ es $8x$ y la medida del lado del cuadrado $\square ABCD$ es $8x$.

  Finalmente, el perímetro del polígono de vértices A, B, E, C y D es $5 \cdot 8x = 40x$.

11. (IIE, IN, 2016) Sea el $\triangle ABC$, tal que $m\angle CAB = 84°$ y $AB = AC$. Si los puntos D, E y F están sobre los lados $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ y $\overline{AB}$, respectivamente, tales que $CE = CD$ y $BF = BD$, entonces $m\angle EDF$ es

(a) $48°$

(b) $66°$

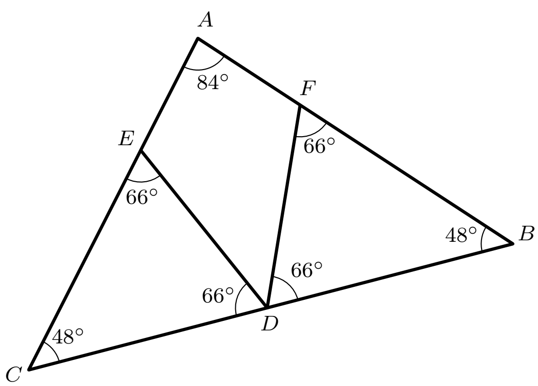
(c) $84°$

(d) $98°$

- Opción correcta: $a)$

Solución:

Dado que dos de los lados del $\triangle ABC$ son de igual medida, dicho triángulo es un triángulo isósceles. De esta manera, $m\angle ACB = m\angle ABC = 48°$, pues el otro ángulo de este triángulo mide $84°$.



Luego, como en el $\triangle CDE$ se tiene que $CD = CE$, entonces este también es isósceles y $m\angle CDE = 66°$.

En forma análoga, en el $\triangle BDF$ se tiene que $BD = BF$, por lo que $\triangle BDF$ es un triángulo isósceles y $m\angle BDF = 66°$.

En las últimas conclusiones se usa el hecho que en todo triángulo la suma de las medidas de los ángulos iternos es $180°$ y que las medidas de los ángulos de la base de todo triángulo isósceles son iguales.

Para determinar la medida del $\angle EDF$ note que $66° + m\angle EDF + 66° = 180° \Rightarrow m\angle EDF = 48°$.

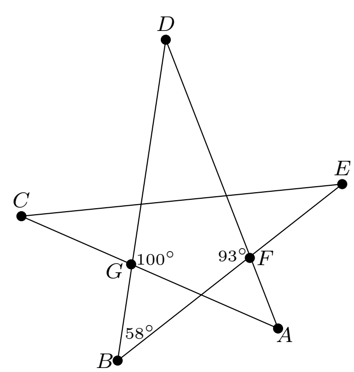
12. (IIE, IN, 2017) La figura adjunta muestra una estrella en forma de pentágono. La medida del $\angle CAD$ es

(a) $35°$

(b) $42°$

(c) $51°$

(d) $65°$



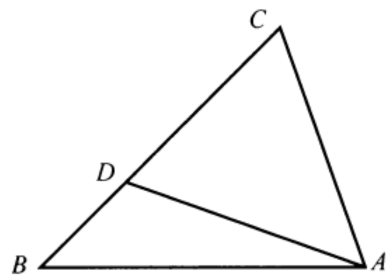
- Opción correcta: c
- Solución:

  Nótese que en el $\triangle BDF$, dado que $\angle B = 58°$ y $\angle F = 93°$, se tiene que $\angle D = 29°$.

  Ahora, tomando el triángulo $\triangle ADG$, se tiene adicionalmente que $\angle G = 100°$, por diferencia, $\angle A = 51°$.

Desarrollo

1. (IIE, IN, 2015) En el $\triangle ABC$, $m\angle ABC = 45°$. El punto D sobre $\overline{BC}$ es tal que $2 \cdot BD = CD$ y $m\angle DAB = 15°$. Determine la medida de $\angle ACB$.

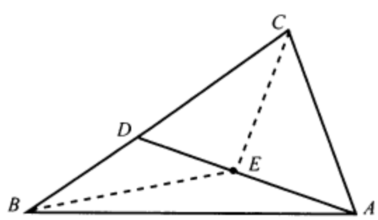


Solución

Sea E un punto sobre $\overline{AD}$ tal que $\overline{CE}$ es perpendicular a $\overline{AD}$, y dibujemos $\overline{BE}$.

Tomamos $\angle ADC$ ángulo exterior de $\triangle ADB$, cuya medida es

$$m\angle ADC = m\angle DAB + m\angle ABD = 15° + 45° = 60°$$



Entonces $\triangle CDE$ cumple ser un triángulo $30° - 60° - 90°$ de donde $DE = \frac{1}{2}CD = BD$. Entonces $\triangle BDE$ es isósceles y $m\angle EBD = m\angle BDE = 30°$. Pero $m\angle ECB$ es también igual a $30°$ y entonces $\triangle BEC$ es isósceles con $BE = EC$.

Por otra parte,

$$m\angle ABE = m\angle ABD - m\angle EBD = 45° - 30° = 15° = m\angle EAB$$

Entonces $\triangle ABE$ es isósceles con $AE = BE$. Por lo tanto, $AE = BE = EC$, y así $\triangle AEC$ es también isósceles con $m\angle EAC = m\angle ECA = 45°$.

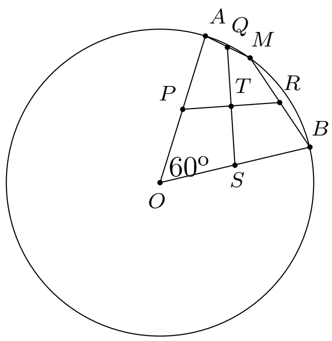
Por lo tanto,

$$m\angle ACB = m\angle ECA + m\angle ECD = 45° + 30° = 75°$$

2. (IIE, IN, 2016) Considere un círculo de centro O. Sean A y B dos puntos sobre la circunferencia, tales que $m\angle AOB = 60°$. Sea M un punto cualquiera sobre la circunferencia (distinto de A y B). Sean P, Q, R y S los puntos medios de $\overline{AO}$, $\overline{AM}$, $\overline{MB}$ y $\overline{OB}$, respectivamente. Determine $m\angle QTR$, donde T es el punto de intersección entre $\overline{PR}$ y $\overline{QS}$.

Solución:

En la siguiente figura se presentan los datos del problema.



Dado que P y Q son los puntos medios de $\overline{AO}$ y $\overline{AM}$ se tiene que $\overline{PQ} \parallel \overline{OM}$ y $PQ = \frac{1}{2}OM$. De forma análoga se concluye que $\overline{SR} \parallel \overline{OM}$ y $SR = \frac{1}{2}OM$. Así $PQ = SR$ y $\overline{PQ} \parallel \overline{SR}$.

Por otra parte, se tiene que P y S son los puntos medios de $\overline{AO}$ y $\overline{BO}$ respectivamente, por lo que $\overline{PS} \parallel \overline{AB}$ y $PS = \frac{1}{2}AB$. De igual forma se concluye que $\overline{QR} \parallel \overline{AB}$ y $QR = \frac{1}{2}AB$. Así $PS = QR$ y $\overline{PS} \parallel \overline{QR}$

Pero $AB = OM$ dado que $AB = AO$ (esto porque $\triangle AOB$ es equilátero) y $\overline{AO}$ y $\overline{OM}$ son radios del círculo. Por lo tanto $PS = PQ = SR = QR$.

Debido a que todos los lados son congruentes y los lados opuestos son paralelos se tiene que $\square PQRS$ es un rombo. En un rombo las diagonales son perpendiculares, por lo tanto $m\angle QTR = 90^{\text{o}}$.