OLIMPIADAS COSTARRICENSES DE MATEMÁTICA
CAPACITACIÓN PARA II ELIMINATORIA 2019
I NIVEL. TEMA: Razonamiento Lógico
DÍA 2. Sesión de la mañana

Soluciones de los problemas

Selección única

1. (IIE, IN, 2017) Pablo lanza una moneda de 50 colones al aire tres veces y anota, para cada lanzamiento, si cae escudo o corona. La probabilidad de que Pablo obtenga exactamente una corona o exactamente un escudo es

   (a) $\frac{1}{4}$

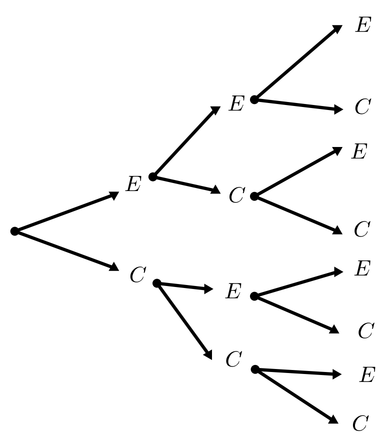
   (b) $\frac{1}{2}$

   (c) $\frac{3}{8}$

   (d) $\frac{3}{4}$

- Opción correcta: d
- Solución:

  Mediante el diagrama de árbol se representan todos los casos posibles, donde E representa escudo y C representa corona.



Como se puede observar en el diagrama de árbol, hay tres casos posibles de obtener exactamente una corona o tres casos posibles de obtener exactamente un escudo.

Por lo tanto, la probabilidad de que Pablo obtenga exactamente una corona o un escudo es $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

2. (IIE, IN, 2015) La probabilidad de que al elegir un número de tres dígitos este satisfaga la condición de que el dígito del medio es el promedio del primer y del último dígito es:

   a) $\frac{2}{9}$
   b) $\frac{1}{20}$
   c) $\frac{45}{899}$
   d) $\frac{200}{899}$

- Opción correcta: b
- Solución:

  El primer y último dígito de un número de tres cifras deben ser ambos pares o ambos impares para que el promedio entre ambos sea un número entero.

  Existen $5 \cdot 5 = 25$ combinaciones de números impares para el primer y último dígito y $4 \cdot 5 = 20$ combinaciones de números pares para el primer y último dígito.

  Como para cada combinación el dígito central es único, existen 45 números de tres dígitos que cumplen que el dígito central es el promedio de los dígitos de los extremos.

  Ahora, existen 900 números de tres dígitos, así que la probabilidad buscada es

$$P(A) = \frac{45}{900} = \frac{1}{20}$$

3. (IIE, IN, 2016) En un tren hay 60 personas distribuidas en tres vagones distintos. Al realizar una parada en una estación se bajan 6 personas del primer vagón, 8 personas del segundo vagón y 4 personas del tercer vagón. De los que no se bajaron del tren, hay el doble de personas en el segundo vagón que en el primero, y el doble en el tercer vagón que en el segundo. La cantidad de personas que habían al principio en el segundo vagón corresponde a

   (a) 11
   (b) 15
   (c) 20
   (d) 24

- Opción correcta: c
- Solución:

  Después de que se bajaron las personas en la estación, quedaron $60 - 6 - 8 - 4 = 42$ personas en el tren. Si x es la cantidad de personas en el primer vagón entonces $x + 2x + 2 \cdot 2x = 42$, por lo que $x = 6$ y así habían $8 + 2 \cdot 6 = 20$ personas al principio en el segundo vagón.

4. (IIE, IN, 2015)Las nuevas placas de automóviles en Costa Rica constan de tres letras consonantes y tres dígitos del 0 al 9, primero las tres letras y luego los tres dígitos. En total hay 21 letras consonantes, las cuales se pueden repetir. El señor Keylor Navas Gamboa quiere tener una placa en la que aparezcan sus iniciales en cualquier orden. Si la placa se asigna al azar, la probabilidad de que Keylor tenga la placa deseada es

   a) $\dfrac{1}{3087}$
   b) $\dfrac{2}{3087}$
   c) $\dfrac{1}{2660}$
   d) $\dfrac{1}{1330}$

- Opción correcta: Opción *b*
- Solución:

  El número de casos totales en que se pueden elegir tres de 21 letras disponibles, incluyendo repeticiones es 21^3, pues para la primera letra hay 21 posibilidades para escoger, lo mismo que para la segunda y tercer letra.

  Las iniciales K, N, G, en cualquier orden dan un total de 6 casos favorables.

  Entonces la probabilidad es $P = \dfrac{6}{21^3} = \dfrac{2\cdot 3}{7^3\cdot 3^3} = \dfrac{2}{7^3\cdot 3^2} = \dfrac{2}{343\cdot 9} = \dfrac{2}{3087}$

5. (IIE, IN, 2017) Sofía tiene cierta cantidad de caramelos; se come 30 % de ellos y le quedan 280 caramelos. Carol tiene la misma cantidad de caramelos que Sofía, pero se come 26 % de ellos. La cantidad de caramelos que Carol se come es

   (a) 30
   (b) 84
   (c) 104
   (d) 296

- Opción correcta: *c*
- Solución:

  Sofía tiene x caramelos, se come 30 %, le queda 70 %. Es decir, le quedan $\dfrac{70x}{100}$ caramelos, lo cual es 280 caramelos.
  De $\dfrac{70x}{100} = 280$ se tiene que $x = 400$.

  Sofía tiene entonces 400 caramelos, pero Carol se come 26 % de ellos; es decir, $\dfrac{400\cdot 26}{100} = 104$ caramelos.

6. (IIE, IN, 2016)Se dice que un número natural es *capicua* si al escribirlo se puede leer de igual forma de izquierda a derecha como de derecha a izquierda; por ejemplo, 23 432 es *capicua*. La cantidad de *capicuas* de 7 dígitos que tienen 4 dígitos diferentes es

   (a) 3024
   (b) 4536
   (c) 5040
   (d) 6561

- Opción correcta: b
- Solución:

  Los números son de la forma $abcdcba$ con $a \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $b,c,d \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ y a,b,c,d dígitos distintos.

  Así, existen 9 posibilidades para el dígito a, 9 posibilidades distintas para b (todas las 10 iniciales menos el dígito que fue escogido para a), 8 posibilidades para c (todas las 10 iniciales menos los dos que fueron utilizadas para a y b) y 7 posibilidades para d (por las mismas razones anteriores).

  Por lo tanto, existen $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$ capicuas de siete dígitos con 4 dígitos distintos.

7. (IIE, IN, 2017) Al simplificar al máximo la expresión:

$$\sqrt[2017]{\frac{\left(k^{2017}\right)^{2017}}{k^{2017}}} - k$$

   donde k es un número entero positivo, se obtiene

   (a) 0
   (b) 1
   (c) $k\left(k^{2015}-1\right)$
   (d) $k\left(k^{2016}-1\right)$

- Opción correcta: c
- Solución:

  Al trabajar con leyes de potencias la expresión se tiene:

$$\sqrt[2017]{\frac{\left(k^{2017}\right)^{2017}}{k^{2017}}} - k = \frac{\left(k^{2017\cdot 2017}\right)^{\frac{1}{2017}}}{k} - k$$

$$= \frac{k^{2017}}{k} - k = k^{2016} - k = k\left(k^{2015}-1\right)$$

8. (IIE, IN, 2015)En una bolsa de papel hay 14 bolas del mismo tamaño y mismo peso de las cuales: cinco son amarillas, cuatro son blancas, tres son verdes y dos son azules. Si se extrae aleatoriamente una de las bolas de la bolsa, la probabilidad de que la bola no sea azul es

   a) $\frac{1}{7}$
   b) $\frac{2}{7}$
   c) $\frac{3}{7}$
   d) $\frac{6}{7}$

- Opción correcta: d
- Solución:

  El espacio muestral asociado con el experimento enunciado está dado por $E = \{\text{la bola es amarilla}\}, \text{la bola es bl}$

  Cada uno de los eventos son equiprobables pero los casos favorables para cada uno de ellos son, en este caso, distintos.

  Para el evento $S =$ "la bola no es azul"se tiene que dicho evento es el evento contrario de "la bola es azul".

  Como $S_1 =$ "La bola es azul"tiene dos casos favorables, se tiene que la probabilidad de que al sacar una bola esta sea azul es $P(S_1) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7}$. Así, la probabilidad del evento contrario (lo que nos interesa en el problema) es $1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$.

9. (IIE, IN, 2017) Una *suma circular* de dos números se define como sumar ambos números y restarle o sumarle seis las veces necesarias para que el resultado esté entre 1 y 6, inclusive.

   Por ejemplo, la *suma circular* de 8 y 9 es $17 - 6 - 6 = 5$, y la *suma circular* de 4 y -7 es $-3 + 6 = 3$.

   Carlos y Karla juegan a lo siguiente: Karla elige un número y luego Carlos lanza un dado, si el resultado del dado es mayor o igual que la suma circular de este y el número de Karla, entonces Carlos gana (en caso contrario gana Karla).

   Si Karla puede elegir solo algún valor del conjunto $\{-2, -1, 2, 3\}$, entonces el número que debe elegir Karla para tener más posibilidad de ganar es

   (a) -2
   (b) -1
   (c) 2
   (d) 3

- Opción correcta: c

- Solución:

  Si Karla elige el 2, entonces solo puede perder si el resultado del dado es 5 o 6, con lo que la suma circular sería 1 y 2 respectivamente (ya que $5 > 1$ y $6 > 2$); si el resultado del dado es otro, Karla gana.

  En los otros casos se puede ver como Carlos gana en más de dos casos.

  Para -2, Carlos gana con 3, 4, 5 o 6 como resultado del dado; para -1, Carlos gana con 2, 3, 4, 5 o 6 como resultado del dado; y para 3, Carlos gana con 4, 5 o 6 como resultado en el dado.

10. (IIE, IN, 2015) La cantidad de dígitos del número $5^{2010} \times 2^{2016} \times 3^3$ corresponde a

    (a) 2010
    (b) 2014
    (c) 2016
    (d) 2020

- Opción correcta: *b*

- Solución:

  $5^{2010} \times 2^{2016} \times 3^3 = 5^{2010} \times 2^{2010} \times 2^6 \times 3^3 = 10^{2010} \times 2^6 \times 3^3 = 10^{2010} \times 1728$. Los primeros cuatro dígitos a la izquierda son 1728 seguido por 2010 ceros, es decir el número tiene 2014 dígitos.

Desarrollo

1. (IIE, IN, 2013) En un barrio viven 4 vecinos de distinta nacionalidad (un francés, un español, un costarricense y un italiano), los cuales se dedican a disciplinas deportivas distintas (fútbol,tenis, baloncesto o ciclismo) y cada uno posee una mascota distinta (perro, gato, canario o conejo). No se sabe el deporte que practica cada uno ni cuál es su mascota, pero se cuenta con la siguiente información:

   1) El gato juega con el balón de baloncesto con la que practica su dueño y el futbolista no tiene perros.
   2) El tenista es amigo del italiano pero no es francés.
   3) El ciclista y el italiano visitan a su amigo que tiene un perro.
   4) El tenista y el dueño del conejo salen a caminar con el futbolista que no es europeo.

   Determine, justificando cada una de sus conclusiones, la mascota y la actividad deportiva a la que se dedica cada vecino.

- Solución:

5) De 4) se tiene que el costarricense practica fútbol.

6) De 2) y 5) se concluye que el español practica tenis.

7) De 3), 5) y 6) se determina que el italiano practica el baloncesto y el francés es ciclista.

8) De 4), 5) y 6) se deriva que el dueño del conejo no es español ni costarricense, por lo que debe ser italiano o francés.

9) De 1), 7) y 8) se tiene que el italiano tiene un gato y el dueño del conejo es francés.

10) De 1), 5) y 9) se concluye que el español tiene un perro y por el ende el costarricense posee un canario.

    Nota: Este ejercicio se puede ver como un ejemplo de como escribir una respuesta de desarrollo de manera ordenada y precisa.

2. (IIE, IN, 2017) En cierto país se cumple lo siguiente:

   - Cada par de ciudades del país están enlazadas por exactamente un medio de transporte.
   - Los únicos medios de transporte en el país son bus, tren y avión.
   - Los tres medios de transporte son usados en el país.
   - Ninguna ciudad del país tiene los tres servicios de transporte.
   - No hay tres ciudades que estén enlazadas (dos a dos) por el mismo medio.

   Determine el máximo número de ciudades de dicho país.

- Solución:

  Sea n el número de ciudades del país.

  Los tres medios de transporte los denotaremos como A, B y T.

  Para que se usen los tres medios de transporte en el país, debe tenerse $n \geq 3$.

  Para $n = 3$, basta unir cada par de ciudades con un medio de transporte distinto.

  Para $n = 4$ sean C_1, C_2, C_3 y C_4 las cuatro ciudades. Unimos C_1 con C_2, C_2 con C_3, C_3 con C_4 y C_4 con C_1 mediante el medio de transporte A; unimos C_1 con C_3 mediante el medio de transporte B y, finalmente, unimos C_2 con C_4 mediante el medio de transpote T.

  Para $n \geq 6$ cada ciudad está unida por lo menos con otras cinco ciudades; como ninguna de las ciudades tiene los tres servicios de transporte, entonces toda ciudad al menos debe estar unida con tres ciudades mediante un mismo medio de transporte. De esta manera, por ejemplo y sin pérdida de generalidad, tenemos una ciudad C_0 unida a otras tres ciudades C_1, C_2 y C_3 mediante un mismo medio de transporte A; luego las ciudades C_1, C_2 y C_3 solo pueden estar unidas por los medios de transporte B y T, pero las tres ciudades no pueden estar unidas por el mismo medio de transporte, por lo que entre los tres enlaces existentes debe haber por lo menos uno del tipo B y otro del tipo T, con lo que se tendría una ciudad atendida por los tres medios de trasporte, contradiciendo otra de las condiciones del problema.

  Con lo anterior, no hay solución para este caso.

  Para $n = 5$ hay que hacer un análisis de casos, llegando a la conclusión de que tampoco hay solución.

  Finalmente, el máximo número de ciudades en dicho país es cuatro.

3. (IIE, IN, 2015) Rolando construye un rectángulo de a unidades de ancho y b unidades de largo. Luego construye otro en el cual aumenta una unidad el ancho y disminuye dos unidades el largo. A partir de este segundo rectángulo construye un tercero, en el cual disminuye dos unidades el ancho y aumenta tres unidades el largo. A partir de este último construye otro en el que aumenta tres unidades el ancho y disminuye 4 unidades el largo. Continúa construyendo rectángulos de esta forma hasta tener 2015 rectángulos. Si inicialmente $a = b = 2015$, determine el área del rectángulo 2015.

- Solución:

  Organizando la información en la siguiente tabla

Rectángulo	Área
1	$ab = (a-0)(b+0)$
2	$(a+1)(b-2)$
3	$(a-1)(b+1)$
4	$(a+2)(b-3)$
5	$(a-2)(b+2)$
6	$(a+3)(b-4)$
7	$(a-3)(b+3)$
8	$(a+4)(b-5)$
9	$(a-4)(b+4)$

Observe que cuando $n = 2k+1$ el ancho es $(a-k)$ y el largo $(b+k)$, mientras que cuando $n = 2k$ el ancho es $(a+k)$ y el largo $(b-k-1)$, con $k = 0, 1, 2, ...$

Como $2015 = 2 \cdot 1007 + 1$ entonces el área es $(a-1007)(b+1007)$

Finalmente, como $a = b = 2015$, el área del rectángulo 2015 es

$$A = (2015 - 1007)(2015 + 1007) = 1008 \cdot 3022$$