OLIMPIADAS COSTARRICENSES DE MATEMÁTICA
CAPACITACIÓN II ELIMINATORIA 2019
I NIVEL. TEMA: Teoría de números
**DÍA 1. Sesión de la tarde**

## Enunciados y soluciones de los problemas

### Selección única

1. (IIE, IN, 2015) La cantidad de números mayores a 500 y menores a 1000 que al ser divididos por 3, 4, 5 y 8 dejan residuo 2 corresponde a

   (a) 3
   (b) 4
   (c) 8
   (d) 9

- Opción correcta: $b$)
- Solución:

  Si $n$ es uno de los números entonces $\exists\, a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tales que:

  i. $n = 3a + 2$.
  ii. $n = 4b + 2$.
  iii. $n = 5c + 2$.
  iv. $n = 8d + 2$.

  De i, ii y iii se tiene que $n - 2$ es múltiplo de 3, 4 y 5. Dado que 3, 4 y 5 son primos entre sí se cumple que $n - 2$ es múltiplo de $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$.

  Los múltiplos de 60 mayores a 500 y menores a 1000 son: 540, 600, 660, 720, 780, 840, 900 y 960. De estos los divisibles por 8 corresponden a: 600, 720, 840 y 960.

  Por lo tanto hay 4 números mayores a 500 y menores a 1000 que son divisibles por 3, 4, 5 y 8 son: 602, 722, 842 y 962.

2. (IIE, IN, 2015) ¿Cuántos de los primeros 100 múltiplos positivos de 30 son múltiplos de 70?

   (a) 9
   (b) 10
   (c) 14
   (d) 21

- Opción correcta: *c*)
- Solución:

  Al descomponer 30 y 70 en factores primos se obtiene:

  $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

  $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$

  Los primeros cien múltiplos positivos de 30 son de la forma $30k,\ k \in \mathbb{Z},\ 1 \leq k \leq 100$ o lo que es lo mismo $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot k,\ k \in \mathbb{Z},\ 1 \leq k \leq 100$.

  Al comparar la descomposición en factores primos de 30 y 70 se observa que tienen en común el 2 y el 5, debido a esto el número $30k$ es múltiplo de 70 cada vez que $k$ sea múltiplo de 7. Dado que $k$ varía de 1 a 100 y que $100 = 7 \cdot 14 + 2$ se tiene que hay 14 múltiplos de 7 entre 1 y 100.

  Por lo tanto hay 14 múltiplos de 30 que son a la vez múltiplos de 70.

3. (IIE, IN, 2016) Si Fátima utiliza 192 dígitos para numerar las páginas de su diario, entonces el número de páginas de su diario es un número divisible por

   (a) 3
   (b) 5
   (c) 7
   (d) 11

- Opción correcta: *b*)
- Solución:

  Para numerar las primeras nueve páginas utiliza 9 dígitos. Para numerar las páginas de la 10 a la 99 utiliza $90 \cdot 2 = 180$ dígitos.

  Así, quedan tres dígitos, que corresponden a la página 100 ($100 = 10 \cdot 10 = 2^2 \cdot 5^2$).

4. (IIE, IN, 2016) La cantidad de números de tres dígitos (donde todos sus dígitos son distintos de cero) que satisfacen que al cambiar de cualquier manera el orden de sus dígitos se obtiene un número divisible por 4 es

   (a) 6
   (b) 8
   (c) 10
   (d) 12

- Opción correcta: $b$)
- Solución:

  Todos los dígitos de tales números deben ser pares. Como un número es divisible por 4 si, y solo si, los últimos dos dígitos son divisibles por 4, no podemos considerar los dígitos 2 o 6 (para que sea divisible por 4 se tendría alguna de las siguientes terminaciones: $12, 32, \ldots 92$ o $16, 36, \ldots, 96$, todas con un dígito impar).

  Por lo tanto, el número consiste solo de dígitos 4 y 8; así, hay 8 opciones: 444, 888, 448, 484, 844, 884, 848 y 488.

5. (IIE, IN, 2017) Considere el número $n = 7a\,931\,41b$ de ocho dígitos que es divisible por 792. El valor del dígito $a$ es

   (a) 2
   (b) 5
   (c) 6
   (d) 11

- Opción correcta: $b$
- Solución:

  Como $a$ y $b$ son dígitos, sus valores están entre 0 y 9.

  Se tiene que $7a93141b$ es divisible por 792, observe que $792 = 8 \cdot 9 \cdot 11$, entonces $7a93141b$ es divisible por 8, 9 y 11.

  Veamos primero que $7a93141b$ es divisible por 8, esto nos dice que las últimas tres cifras de dicho número es divible por 8. En este caso, se tiene que $41b$ es divisible por 8. Observe que entre 410 y 419 solamente existe un número que es divisible por 8, el número es 416. Por lo tanto el valor de $b = 6$.

  Luego, $7a93141b$ es divisible por 9, esto nos dice que la suma de sus cifras es divisible por 9. Entonces, $7 + a + 9 + 3 + 1 + 4 + 1 + b = 25 + a + b$ es divisible por 9. Observe que $a + b$ puede ser 2 o 11, pues $0 \leq a + b \leq 18$.

  Como $b = 6$, cuando $a + b = 2 \Rightarrow a = -4$, se descarta, pues $a$ está entre 0 y 9. Cuando $a + b = 11 \Rightarrow a = 5$.

  Por lo tanto, el valor de $a$ es 5.

6. (IIE, IN, 2018) Un faro emite tres colores distintos:

   - Rojo cada 16 segundos
   - Verde cada 45 segundos
   - Blanco cada 2 minutos y 20 segundos

   Los tres colores son emitidos, simultáneamente, a media noche. La frecuencia con que son emitidos simultáneamente los colores rojo y blanco corresponde a

   (a) 720 segundos

   (b) 21 minutos

   (c) 9 minutos y 20 segundos

   (d) 1 hora y 24 minutos

- Opción correcta: $(c)$

- Solución:

  El color rojo se emite cada 16 segundos.
  El color verde se emite cada 45 seguntos.
  El color blanco se emite cada 2 minutos y 20 segundos, es decir cada 140 segundos.

  Calculamos el m.c.m de 16 y 140.

$$\begin{array}{cc|c} 16 & 140 & 2 \\ 8 & 70 & 2 \\ 4 & 35 & 2 \\ 2 & 35 & 2 \\ 1 & 35 & 5 \\ 1 & 7 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$$

  Los colores rojo y blanco coiniciden cada 560 segundos, es decir cada 9 minutos y 20 segundos.

7. (IIE, IN, 2018) La cantidad de números primos de tres cifras que existen, tales que al suprimirle la cifra de las centenas el número resultante es un cuadrado perfecto de dos cifras corresponde a

   (a) 5

   (b) 6

   (c) 7

   (d) 8

- Opción correcta: ($b$)
- Solución:

  Para ser cuadrado perfecto el número deberá terminar en 16, 25, 36, 49, 64 y 81, pero solamente podrán ser primos los terminados en 49 y 81. Así, se tendrá una lista de 18 números.

| | |
|---|---|
| 149 | 181 |
| 249 | 281 |
| 349 | 381 |
| 449 | 481 |
| 549 | 581 |
| 649 | 681 |
| 749 | 781 |
| 849 | 881 |
| 949 | 981 |

  Aplicando las reglas de divisibilidad se obtiene que solamente los números 149, 181, 281, 349, 449 y 881 son primos.

8. (IIE, IN, 2018) La suma de todos los enteros positivos menores que 100 y que tienen exactamente tres divisores positivos diferentes corresponde a

   (a) 87

   (b) 88

   (c) 176

   (d) 177

- Opción correcta: ($a$)
- Solución:

  Si un número tiene solo tres divisores, entonces debe ser el cuadrado de un número primo; así, se tiene que: $S = 4 + 9 + 25 + 49 = 87$.

9. (IIE, IN, 2018) Se elige un entero $n$ al azar, tal que $1000 \leq n \leq 9999$. La probabilidad de que el producto de las cifras de $n$ sea múltiplo de 3 corresponde a

   (a) $\dfrac{118}{125}$

   (b) $\dfrac{107}{125}$

   (c) $\dfrac{18}{125}$

   (d) $\dfrac{7}{125}$

- Opción correcta: ($b$)
- Solución

  Vamos a calcular la probabilidad de que el producto de las cifras no sea múltiplo de 3, es decir, de que ninguna de las cifras sea múltiplo de 3.

  La probabilidad de que la cifra de los millares no sea múltiplo de 3 es igual a $\dfrac{6}{9}$ ya que hay seis elecciones $\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ que no son múltiplos de 3 de nueve candidatos posibles.

  No obstante, para las cifras de las centenas, decenas y unidades la probabilidad se reduce a $\dfrac{6}{10}$ ya que también cabe la posibilidad de que tomen el valor 0.

  Como la elección de los distintos dígitos es independiente, la probabilidad de que el producto de las cifras no sea múltiplo de 3 es igual al producto de las probabilidades: $\dfrac{6}{9} \cdot \dfrac{6}{10} \cdot \dfrac{6}{10} \cdot \dfrac{6}{10} = \dfrac{18}{125}$.

  La probabilidad de que dicho producto sí sea múltiplo de 3 es la complementaria $1 - \dfrac{18}{125} = \dfrac{107}{125}$, que es el número buscado.

10. (IIE, IN, 2018) Si $a$, $b$ y $c$ son dígitos, la cantidad total de números múltiplos de seis de la forma $4a5bc$ corresponde a

   (a) 161

   (b) 163

   (c) 165

   (d) 167

- Opción correcta: ($d$)
- Solución:

  Note que $c$ tiene que ser un número par, que $4 + 5 = 9$, y que del 0 al 9 hay 4 números de la forma $3k$, 3 de la forma $3k + 1$ y otros 3 de la forma $3k + 2$.

  Si $c$ es 0 o 6, entonces $a + b = 3k$ por lo que hay $2 \cdot (4 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 3) = 68$ opciones.

  Si $c$ es 2 u 8, entonces $a + b = 3k + 1$ por lo que hay $2 \cdot (3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4) = 66$ opciones.

  Si $c$ es 4, entonces $a + b = 3k + 2$ por lo que hay $1 \cdot (3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4) = 33$ opciones.

  En total, $68 + 66 + 33 = 167$ números múltiplos de seis de la forma indicada.

**Desarrollo**

1. (IIE, IN, 2016) Determine el menor número y el mayor número de cuatro dígitos distintos que son divisibles por cada uno de sus dígitos respectivos.

- Solución:

  En ambos casos (menor y mayor) debemos descartar el dígito 0, pues ningún número no nulo es múltiplo de 0.

  El menor número de cuatro dígitos distintos es 1234, sin embargo, este número no es múltiplo de 3 pues sus dígitos suman 10, ni múltiplo de 4.

  El 1235 tampoco cumple, pues no es divisible ni por 2 ni 3. Podemos ver que 1236 sí es divisible por 3 pues sus dígitos suman 12, es par por lo que es divisible por 2, y al ser divisible por 2 y 3 es también múltiplo de 6; además, todo número es múltiplo de 1. Con esto, 1236 es el menor número de cuatro dígitos distintos que es divisible por cada uno de sus dígitos.

  Para hallar el mayor número, podemos asumir, inicialmente, que existe uno de la forma $98ab$, con $9+8+a+b$ múltiplo de 9. Como $9+8=17$, se debe tener $a+b=10$, pues $a+b=1$ y $a+b=19$ son casos imposibles con $a$ y $b$ dígitos distintos no nulos.

  El primer candidato sería 9873, pero no es múltiplo de 8.

  Vemos que 9864 sí cumple las condiciones: $9+8+6+4=27$ por lo que es divisible por 9, 864 es múltiplo de 8, por lo que es divisible por 8 y en consecuencia también por 4, al ser divisible por 9 y 8 también lo es por 3 y 2, es decir, también por 6, y con esto 9864 es el mayor número de cuatro dígitos distintos que es divisible por cada uno de sus dígitos.

2. (IIE, IN, 2018) Verónica, Ana y Gabriela situadas en una ronda se divierten con el siguiente juego: una de ellas elige un número y lo dice en voz alta; la que está a su izquierda divide el número dicho entre su mayor divisor primo y dice el resultado en voz alta; la que está a su izquierda divide este último número entre su mayor divisor primo y dice el resultado en voz alta, y así sucesivamente. Ganará aquella que deba decir en voz alta el número 1, momento en que el juego termina.

   Ana eligió un número mayor que 50 y menor que 100 y ganó.

   Verónica eligió el número consecutivo posterior del que escogió Ana, y ¡Verónica también ganó!

   Determine todos los números que pudo haber elegido Ana.

- Solución:

  Para que Ana gane tendrá que mencionar un número que tenga 3 factores primos o 6 factores primos.(Justifique porqué)
  Así, los números que cumplen dicha característica son:
  $52=2\cdot2\cdot13$, $63=3\cdot3\cdot7$, $64=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2$, $66=2\cdot3\cdot11$, $68=2\cdot2\cdot17$, $70=2\cdot5\cdot7$, $75=3\cdot5\cdot5$, $76=2\cdot2\cdot19$, $78=2\cdot3\cdot13$, $92=2\cdot2\cdot23$, $96=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3$, $98=2\cdot7\cdot7$, $99=3\cdot3\cdot11$

  Como Verónica elige el siguiente número consecutivo y gana, entonces Ana tuvo que elegir 63, 75 o 98.

3. (IIE, IN, 2018) Determine todos los números naturales $N$ de dos dígitos, tales que $N$ equivale a siete veces la suma de sus dígitos.

**Solución**

Sean $a$ y $b$ los dígitos y $N$ el número, tal que $N = ab$.

Utilizando notación desarrollada se tiene que $N = 10a + b$.

$$\begin{aligned} 10a + b &= 7\,(a + b) \\ 10a + b &= 7a + 7b \\ 3a &= 6b \\ a &= 2b \end{aligned}$$

Lo cual significa que $a$ es un número par. Así:
Si $a = 2$, $b = 1$.
Si $a = 4$, $b = 2$.
Si $a = 6$, $b = 3$.
Si $a = 8$, $b = 4$.

Entonces los números que cumplen dicha característica son $21, 42, 63$ y $84$