OLIMPIADAS COSTARRICENSES DE MATEMÁTICA
CAPACITACIÓN PARA II ELIMINATORIA 2019
I NIVEL. TEMA: Varios
DÍA 2. Sesión de la tarde

Solución de los problemas

Selección única

1. (IIE, IN, 2016) En una caja hay bolas iguales de cuatro colores distintos: azul, blanco, rojo y verde. Si se extrae una bola al azar, la probabilidad de extraer una azul es el doble que la de extraer una blanca; la probabilidad de extraer una blanca es el doble que la de extraer una roja; y la de extraer una roja es el doble que la de extraer una verde. La probabilidad de que al extraer una bola de la caja esta NO sea azul o verde es

   (a) $\frac{1}{5}$
   (b) $\frac{2}{5}$
   (c) $\frac{3}{5}$
   (d) $\frac{4}{5}$

- Opción correcta: b
- Solución:

  Sin pérdida de generalidad, se puede considerar que hay una bola verde, dos bolas rojas, cuatro bolas blancas y ocho bolas azules.

  Se desea que al extraer la bola de la caja esta no sea azul o verde, es decir, la bola extraída debe ser blanca o roja. De acuerdo con las cantidades supuestas al inicio, los casos totales son 15 y los casos favorables son seis. De esta manera, la probabilidad en cuestión es $\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$.

2. (IIE, IN, 2015) Julio tiene una cuenta en el banco, cuyo número tiene la forma $ABC - DEF - GHIJ$, donde cada letra representa un dígito diferente. Los dígitos en cada parte del número tienen la característica de que están ordenados de manera decreciente, es decir, $A > B > C$, $D > E > F$, y $G > H > I > J$. Además D, E y F son números pares consecutivos, mientras que G, H, I y J son dígitos impares consecutivos y $A + B + C = 9$. Entonces el valor de A es

   a) 5
   b) 6
   c) 7
   d) 8

- Opción correcta: b

- Solución:

  Para los últimos cuatro dígitos, los cuales deben ser impares consecutivos, tenemos los posibles ordenamientos 9753 o 7531, de donde alguno de los otros impares respectivamente 1 o 9, será el valor de A, B o C, pero recordemos también que $A+B+C=9$ por lo que descartamos el segundo ordenamiento ya que ninguna de estas letras puede ser 9, por lo que debe ser 1.

  Respecto a los tres dígitos pares consecutivos descendientes, tenemos las posibilidades 864, 642 o 420, quedando los pares 2 y 0, 8 y 0, 8 y 6 respectivamente, los cuales serían los valores de las otras letras de la primera parte del número.

  Sabiendo que una de las primeras letras es 1, las otras deben ser 8 y 0 para que estas sumen 9.

  Por lo que el número de cuenta es 810-642-9753. y Así $A=8$, siendo b) la respuesta correcta.

3. (IIE, IN, 2018) Un rectángulo mide 192×84. Se corta el cuadrado de mayor tamaño que se pueda del rectángulo con un solo corte. Si ambas piezas resultantes son cuadrados, el proceso termina, sino se repite el proceso recortando el rectángulo no cuadrado. La cantidad de piezas que resultan al final del proceso corresponde a

   (a) 6

   (b) 7

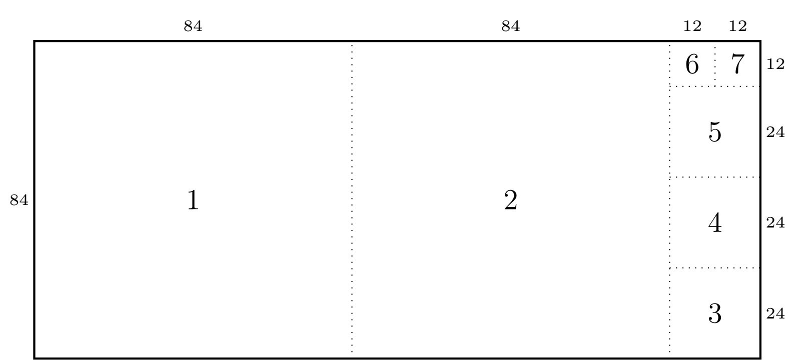
   (c) 8

   (d) 9

- Opción correcta: b

- Solución:

  Nótese que lo más que puede medir el cuadrado en cuestión (de hecho, exáctamente lo único que puede medir) es la longitud menor del rectángulo restante. Entonces, si se quita un cuadrado (1) de 84×84, la pieza restante mide 108×84. De aquí se quita un cuadrado (2) de 84×84, y queda un rectángulo de 84×24. Se quita un cuadrado (3) de 24×24, quedando 60×24, se quita un cuadrado (4) de 24×24, quedando 36×24, se quita un cuadrado (5) de 24×24, quedando 12×24, de donde se sacan dos cuadrados de 12×12.



4. (IIE, IN, 2015) Pablo, Andrés y Carlos cuentan con 15, 14 y 13 fichas cada uno. Juegan un juego que sigue una única regla, en cada ronda el jugador que tiene más fichas, da una ficha a cada uno de los otros jugadores y coloca otra en una pila de descarte. El juego termina cuando a alguno de los jugadores se le acaban las fichas. ¿Cuántas rondas tendrá el juego?

   a) 12
   b) 15
   c) 37
   d) 39

- Opción correcta: c
- Solución:

  Después de las primeras tres rondas Pablo, Andrés y Carlos contarán con 14, 13 y 12 fichas, respectivamente.

  Es decir, cada secuencia de tres rondas, los jugadores reducen en una sus fichas.

  Después de 36 rondas, cada uno tiene 3, 2, y 1 ficha, respectivamente, y después de la ronda 37, Pablo no tendrá fichas.

5. (IIE, IN, 2017) Una pulga quiere subir una escalera. Ella puede hacer solo dos tipos de brincos: tres escalones hacia arriba o cuatro escalones hacia abajo. Empezando a nivel del piso, la cantidad mínima de brincos que tendrá que dar la pulga para descansar en el escalón 22 es

   (a) 9
   (b) 10
   (c) 12
   (d) 15

- Opción correcta: c
- Solución:

  Si la pulga sube 30 escalones (10 brincos hacia arriba) y luego baja 8 escalones (2 brincos hacia abajo) se llega a descansar en el escalón 22.

  Ahora, note que hay que dar al menos 8 saltos, puesto que 7 o menos no llegaría a 22 ($3 \times 7 = 21$).

  Por lo que se puede simplificar el problema a resolver $3x - 4y = 1$, minimizando $x + y$, donde ambos son enteros positivos, y representa los saltos hacia abajo, y x los saltos hacia arriba, después del sétimo hacia arriba.

  Claramente $x > y$. Si hubiese una solución con $x + y < 5$, se tendría que los únicos casos con posibilidad de satisfacer las condiciones serían $x = 2, y = 1$ ($3x - 4y = 2$), o $x = 3, y = 1$ ($3x - 4y = 5$), donde ninguno satisface.

  Por lo tanto, el menor número de saltos sería 12.

6. (IIE, IN, 2016) Un juego consiste de una cuadrícula de 4×4 y fichas de dos formas (triángulos y cuadrados). Un jugador escoge un tipo de ficha y se la da al segundo jugador quien la coloca en cualquiera de las 16 casillas disponibles, luego el segundo jugador escoge un tipo de ficha y se la da al primero quien la coloca donde quiera (de los cuadros que están libres), continúan de este modo y gana el que logre formar una línea con tres fichas de la misma forma (horizontal, vertical o diagonal).

   Antonio y Berta juegan una partida. Primero Antonio toma un cuadrado y se lo da a Berta, quien lo coloca en la casilla 6 (considere la imagen adjunta). Berta le da un triángulo a Antonio y este lo coloca en la casilla 7. Antonio le da otro cuadrado a Berta y ella lo coloca en la casilla 10. Ella le da un triángulo a Antonio y él lo coloca en la casilla 14. Ahora Antonio le da un triángulo a Berta. La cantidad de casillas donde Berta puede colocar ese triángulo de modo que no pierda en la siguiente jugada es

   (a) 4
   (b) 5
   (c) 6
   (d) 7

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

- Opción correcta: b
- Solución:

  Si coloca el triángulo en cualquiera de las casillas 3, 8, 11, 12, 13, 15, 16, en la siguiente jugada Antonio ganará, sin importar el tipo de ficha que ella le dé. Por ejemplo, si coloca el triángulo en la casilla 11 y le da a Antonio un cuadrado, este ganará colocándolo en la casilla 2, si le da un triángulo, este ganará colocándolo en la casilla 3 o 15. Si lo coloca en la 8 y le da un triángulo, Antonio ganará colocándolo en la casilla 11 y si le da un cuadrado gana colocándolo en la 2.

  Si lo coloca en cualquiera de las restantes 5 casillas puede evitar perder en la siguiente jugada. Si lo coloca en las casillas 1, 4, 5, 9 y le da a Antonio un triángulo, entonces este no puede ganar. Si lo coloca en la casilla 2, puede evitar perder dándole a Antonio un cuadrado.

7. (IIE, IN, 2015) Berta tiene 6 hijas pero no tiene ningún hijo. Algunas de sus hijas tienen 6 hijas, y el resto ninguna. Berta tiene en total 30 hijas y nietas, pero no tiene bisnietas. ¿Cuántas mujeres de la familia no tienen hijas?

   a) 23
   b) 24
   c) 25
   d) 26

- Opción correcta: d

- Solución:

  Berta tiene $30 - 6 = 24$ nietas, de las cuales ninguna tiene hijas. Las nietas son hijas de $\frac{24}{6} = 4$ hijas de Berta.

  Entonces el número de mujeres que no tienen hijas es $24 + 2 = 26$.

8. (IIE, IN, 2016) Juan lanza un dado con seis caras numeradas del 1 al 6 y José un dado con ocho caras numeradas del 1 al 8. La probabilidad de que el producto de los dos números obtenidos sea un múltiplo de 3 es

   (a) $\dfrac{1}{2}$

   (b) $\dfrac{2}{5}$

   (c) $\dfrac{3}{5}$

   (d) $\dfrac{7}{10}$

- Opción correcta: a
- Solución:

  En total hay 48 posibles eventos. De ellos, el producto de ambos resultados es múltiplo de 3 si Juan lanza un 3 o 6, o si José lanza un 3 o 6. El número de tales eventos es $8+8+6+6-4 = 24$, ya que estamos contando los resultados $(3,3),(3,6),(6,3),(6,6)$ dos veces. Por lo tanto, la probabilidad es $24/48 = 1/2$.

9. (IIE, IN, 2017) Carlos tiene cuadrados verdes de tamaño 1×1, cuadrados amarillos de tamaño 2×2 y cuadrados rojos de tamaño 3×3. Él quiere crear un cuadrado usando estos cuadrados, en el cual aparezcan los tres colores. La mínima cantidad de cuadrados que debe utilizar es

   (a) 5

   (b) 6

   (c) 7

   (d) 8

- Opción correcta: d
- Solución:

  Si usa al menos un cuadrado rojo y uno amarillo se debe completar un cuadrado 5×5. Usando dos cuadrados amarillos más, y cuatro verdes se completa el cuadrado con 8 cuadrados.

  Falta ver que no es posible hacerlo con menos. Observe que la máxima área que se puede cubrir con 7 cuadrados es $5 \cdot 9 + 4 + 1 = 50$. Sean x, y, z las cantidades de cuadrados de cada tipo, entonces debe cumplirse que

$$\begin{aligned} 9x + 4y + z &= n^2 \\ x + y + z &\leq 7 \end{aligned}$$

donde $n = 5, 6, 7$. Las únicas soluciones son $(x, y, z) = (3, 2, 1)$ y $(x, y, z) = (2, 1, 3)$, y verificando directamente se comprueba que ninguna de estas configuraciones es posible.

Desarrollo

1. (IIE, IN, 2016) Considere una secuencia de números donde el primer término es 1 y el segundo 3; a partir de aquí, cada término se obtiene realizando la resta entre los términos anterior y trasanterior, por ejemplo, el tercer término se obtiene realizando la resta del segundo menos el primero. Determine la suma de los primeros 1821 términos.

- Solución:

Se obtienen algunos términos de la secuencia numérica:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
1	3	2	-1	-3	-2

a_7	a_8	a_9	$\cdots$
1	3	$\cdots$	

Se observa que los seis primeros términos se repiten en la sucesión (pues los términos a_7 y a_8 son exactamente los dos primeros términos de la sucesión).

Además, si s representa la suma de cada período de seis términos de la sucesión, se tiene que $s = 1 + 3 + 2 - 2 - 3 - 2 = 0$.

Como se pide la suma de los primeros 1821 primeros términos y se tiene que $1821 = 1818 + 3 = 303 \cdot 6 + 3$; por lo que la suma de los primeros 1818 términos es cero y, por lo tanto, la suma de los 1821 primeros términos será la suma de los tres primeros términos de la sucesión: $1+3+2 = 6$.

2. (IIE, IN, 2017) En un tablero de 8×4 casillas se han colocado nueve fichas de la siguiente manera: tres fichas en la primera fila de color verde cada una, tres fichas en la segunda fila de color amarillo cada una, y tres fichas en la tercera fila de color rojo cada una, tal y como se muestra en la figura adjunta.

   Cada ficha se puede mover únicamente si salta sobre otra ficha y si la casilla en la que cae está desocupada; puede saltar horizontalmente, verticalmente o en diagonal. Por ejemplo, es válido mover la ficha de la casilla $2B$ (amarilla) a cualquiera de las casillas $2D$, $4D$ o $4B$, o bien mover la ficha de la casilla $3B$ (roja) a cualquiera de las casillas $1D$ o $3D$.

   a) Determine la cantidad mínima de movimientos para mover todas la fichas verdes a la fila tres, todas las amarillas a la fila cuatro y todas la rojas la fila cinco pero que queden en las columnas A, B y C como están originalmente.

   b) ¿Cuántos movimientos se necesitan para mover todas la fichas a las últimas tres filas, sin importar el color, ni la columna?

	A	B	C	D
1	v	v	v	
2	a	a	a	
3	r	r	r	
4				
5				
6				
7				
8				

- Solución:

  Para mover las fichas a la tercera, cuarta y quinta fila, se necesita un mínimo de 10 movimientos:

  1) $2A$ ⓐ $\to 4A$
  2) $3A$ ⓡ $\to 5A$
  3) $2C$ ⓐ $\to 4C$
  4) $3C$ ⓡ $\to 5C$
  5) $1A$ ⓥ $\to 3C$
  6) $1C$ ⓥ $\to 3A$
  7) $3B$ ⓡ $\to 5D$
  8) $1B$ ⓥ $\to 3B$
  9) $2B$ ⓐ $\to 4B$
  10) $5D$ ⓡ $\to 5B$

  Por último, es imposible mover todas las filas a las últimas filas, ya que hay seis fichas (verdes y rojas) que se mueven solo en filas impares, mientras que las tres amarillas solo de mueven en filas pares y al final tenemos dos filas pares y una fila impar.