OLIMPIADAS COSTARRICENSES DE MATEMÁTICA
CAPACITACIÓN II ELIMINATORIA 2019
II NIVEL. TEMA: Álgebra
DÍA 1. Sesión de la mañana

Enunciados y soluciones de los problemas

Selección única

1. (IIE, IIN, 2015) Si $(3x+2-b)(3x+2+b) = (3x-2+)(3x-2-a)$, y , $a+b=4x$ con $x>0$, el valor numérico de $b-a$ corresponde a

   (a) 2
   (b) 6
   (c) 8
   (d) 10

- Opción correcta: $b)$
- Solución:

$$(3x+2-b)(3x+2+b) = (3x-2+a)(3x-2-a)$$
$$(3x+2)^2 - b^2 = (3x-2)^2 - a^2$$
$$24x = b^2 - a^2$$
$$24x = (b+a)(b-a)$$
$$24x = 4x(b-a)$$
$$6 = b-a$$

2. (IIE, IIN, 2016) La cantidad de duplas de la forma (a,b), con $a,b \in \mathbb{N}$ que cumplen que $\dfrac{a^{-1}+b}{a+b^{-1}} = 12$ y $a+b \leq 120$ es

   (a) 5
   (b) 9
   (c) 10
   (d) 20

- Opción correcta: (b)
- Solución

$$\frac{a^{-1}+b}{a+b^{-1}}=\frac{\frac{1}{a}+b}{a+\frac{1}{b}}=\frac{\frac{1+ab}{a}}{\frac{ab+1}{b}}=\frac{b}{a}=12\Rightarrow b=12a.$$ Dado que $a+b\leq 120$ se tiene que $13a\leq 120$.

Luego $a\leq 9$. Pero $a\neq 0$ por lo tanto $1\leq a\leq 9$. Para cada valor de a hay un valor respectivo para b. En total hay 9 parejas de números: $(1,12),(2,24),(3,36),...,(9,108)$.

3. (IIE, IIN, 2016) Considere la ecuación cuadrática $x^2-px+q=0$, donde p, q son números primos. Si se sabe que existen dos soluciones enteras positivas diferentes, entonces el valor de p^2+q^2 es

   (a) 5
   (b) 13
   (c) 29
   (d) 34

- Opción correcta: b)
- Solución:

  El lado izquierdo se puede factorizar $(x-a)(x-b)$, donde a y b son las dos soluciones enteras. Por lo tanto, se debe cumplir que $ab=q$, por lo que al ser q primo, una de las raíces debe ser 1 y la otra q. Luego, $p=a+b=q+1$, por lo que p y q son primos consecutivos. Así, $p=3$ y $q=2$. Por lo tanto $p^2+q^2=13$

4. (IIE, IIN, 2016) La edad promedio de un grupo de administradores y de psicólogos es 40 años. Si el promedio de edad de los administradores es 35 años y la de los psicólogos es 50 años, entonces la razón del número de psicólogos con respecto al número de administradores es

   (a) 1 : 2
   (b) 2 : 1
   (c) 2 : 3
   (d) 3 : 2

- Opción correcta: a)
- Solución:

  Si a y p representan las cantidades de administradores y de psicólogos, respectivamente, entonces se busca el valor de $\frac{p}{a}$.

  De acuerdo con lo enunciado se satisface que:

$$\begin{aligned}\frac{35a+50p}{a+p}=40 \quad &\Rightarrow \quad 35a+50p=40\,(a+p)\\ &\Rightarrow \quad 35a+50p=40a+40p\\ &\Rightarrow \quad 50p-40p=40a-35a\\ &\Rightarrow \quad 10p=5a\\ &\Rightarrow \quad \frac{p}{a}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

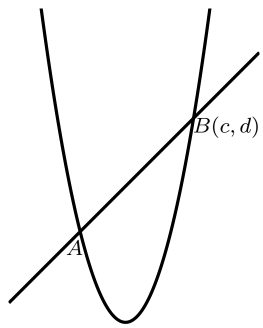
5. (IIE, IIN, 2017) En la figura adjunta están representadas las ecuaciones $y = x - 1$ y $y = x^2 + ax + b$. Los puntos A y B son los puntos de intersección entre la recta y la parábola. Si las coordenadas del punto A son $(1, 0)$ y el punto $(0, 5)$ pertenece a la parábola, entonces las coordenadas del punto B son

(a) $(4, 3)$

(b) $(5, 4)$

(c) $(6, 5)$

(d) $(7, 6)$



- Opción correcta: c
- Solución:

Como $(0, 5)$ pertenece a la parábola, satisface la ecuación $y = x^2 + ax + b$; así, $b = 5$.

Como $A\,(1, 0)$ pertenece a la parábola, satisface la ecuación $y = x^2 + ax + 5$; así, $a = -6$.

Con lo anterior, la ecuación de la parábola es $y = x^2 - 6x + 5$.

El punto $B\,(c, d)$ satisface tanto la ecuación de la recta como la ecuación de la parábola, por lo que $d = c - 1$ y $d = c^2 - 6c + 5$. Luego,

$$\begin{aligned}&c^2-6c+5=c-1\\ \Rightarrow\quad &c^2-7c+6=0\\ \Rightarrow\quad &(c-1)\,(c-6)=0\\ \Rightarrow\quad &c=1 \ \vee \ c=6\end{aligned}$$

Uno de los puntos es $A\,(1, 0)$ y el otro punto es $B\,(6, 5)$.

6. (IIE, IIN, 2017) Sean a, b y c números reales, con $a \neq c$. Sean

$$P(x) = 3x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 2$$

$$Q(x) = 3x^4 + cx^3 + bx^2 + ax + 2$$

Las condiciones que deben cumplir los números a, b y c para que los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ tengan dos raíces comunes son

(a) $a = 3$ y $b = c$

(b) $b = -5$ y $a = -c$

(c) $c = -3$ y $a = b$

(d) $b = 5$ y $c = 2a$

- Opción correcta: b
- Solución:

Para que $P(x) = Q(x) = 0$ se tiene que $P(x) - Q(x) = (a-c)x^3 + (c-a)x = (a-c)x(x-1)(x+1) = 0$.

Esto nos dice que las posibles raíces comunes deben ser 0, 1 o -1 y no puede haber una raíz doble común. Ahora $x = 0$ no es raíz de ninguno de los polinomios.

Por otra parte $P(1) = Q(1) = 0$ implica que $a + b + c + 5 = 0$ y $P(-1) = Q(-1) = 0$ implica que $-a + b - c + 5 = 0$, de donde $b = -5$ y $a = -c$

7. (IIE, IIN, 2017) Considere la ecuación cuadrática $x^2 + \frac{p}{3}x + q - 5 = 0$ en la que p y q son constantes reales. Si $p+q$ es un número primo y la ecuación posee una única solución real, entonces $p+q$ es

(a) 2

(b) 3

(c) 5

(d) 7

- Opción correcta: c
- Solución:

Denote n: única solución de la ecuación cuadrática $x^2 + \frac{p}{3}x + q - 5 = 0$.

Luego, $x^2 + \frac{p}{3}x + q - 5 = 0$ se puede escribir como $(x - n)^2 = x^2 - 2nx + n^2 = 0$.

Luego, $-2n = \frac{p}{3}$ y $n^2 = q - 5$, de donde $p = -6n$, $q = n^2 + 5$ y $p + q = n^2 - 6n + 5 = (n-5)(n-1)$.

Como $p + q$ es un número primo, hay dos posibles casos:

1) $n - 5 = 1$, $n = 6$ y $n - 1 = 5$

2) $n - 1 = 1$, $n = 2$ y $n - 5 = -3$

En el primer caso $p+q=5$ y en el segundo $p+q=-3$. El segundo caso no puede darse pues $p+q$ es un número primo. Así, $p+q=5$.

8. (IIE, IIN, 2018) Considere la ecuación $mx^2+(2m-3)\,x+m-2=0$, con m constante real. Si la ecuación posee solución única, entonces la solución corresponde a

   (a) -3

   (b) $\dfrac{-1}{3}$

   (c) $\dfrac{9}{4}$

   (d) $\dfrac{-9}{4}$

- Opción correcta: (b)
- Solución:

$$\begin{aligned}\triangle &= (2m-3)^2-4\cdot m\cdot(m-2)\\ &= 4m^2-12m+9-4m^2+8m\\ &= -4m+9\end{aligned}$$

Luego,

$$\delta=0\Rightarrow m=\frac{9}{4}$$

Así, la ecuación es de la forma $\dfrac{9}{4}x^2+\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{4}=0$ y la solución corresponde a $x=\dfrac{-1}{3}$

9. (IIE, IIN, 2018) Luz y María compiten en resolver problemas. A cada una se le entrega la misma lista de 100 problemas. La primera en resolver cualquiera de los problemas recibe cuatro puntos, mientras que la segunda en resolverlo recibe un punto. Si se resolvieron exactamente 60 problemas y juntas obtuvieron 296 puntos en total, entonces la cantidad de problemas resueltos tanto por Luz como por María corresponde a

   (a) 53

   (b) 54

   (c) 55

   (d) 56

- Opción correcta: (d)
- Solución:

Sea a el número de problemas resueltos por ambas y b el número de problemas que solo resolvió una de las dos; luego $a+b=60$ y por los puntos se tiene que $5a+4b=296$ (a cada problema en común se asignaban 4 puntos a la primera en resolverlo y 1 punto a la segunda; es decir, 5 puntos en total; mientras que cada problema que solo una de ellas resolvió recibía 4 puntos), de donde $a = 56$ y $b = 4$, por lo que en común resolvieron 56 problemas.

10. (IIE, IIN, 2018) Considere el sistema de ecuaciones $\begin{cases} -x^2 + y = -1 \\ x^2 - \alpha y = \alpha \end{cases}$, donde x y y son las incógnitas y α es un parámetro. Para que el sistema posea solución única, debe cumplirse que

    (a) $\alpha \in \mathbb{R}$

    (b) $\alpha \in \mathbb{R} - \{1\}$

    (c) $\alpha \in [1, +\infty[$

    (d) $\alpha \in]-\infty, 1]$

- Opción correcta: (b)
- Solución:

  Al sumar miembro a miembro las dos ecuaciones, se obtiene $(1-\alpha)\, y = \alpha - 1 \Rightarrow y = \dfrac{\alpha - 1}{1 - \alpha} = -1$, siempre que $\alpha \neq 1$ (con $\alpha = 1$ el sistema posee infinito número de soluciones).

  Ahora, con $y = -1$, al sustituir en la primera ecuación después de despejar x, se obtiene $x^2 = y + 1 \Rightarrow x^2 = -1 + 1 = 0 \Rightarrow x = 0$.

  Por lo tanto, si $\alpha \neq 1$, el sistema posee la única solución $(0, -1)$.

Desarrollo

1. (IIE, IIN, 2016) Tres fábricas de televisores A, B y C, producen cierta cantidad de televisores por día cada una. Las fábricas A y B producen en total 600 televisores en 10 días. Las fábricas B y C duran 12 días en producir 540 televisores. Si las fábricas A y C pueden hacer 440 televisores en 8 días, determine cuántos televisores produce la fábricas C en 20 días.

- Solución:

  Sean a, b, c la cantidad de televisores que producen por día las fábricas A, B, C respectivamente. Entonces

$$\left\{\begin{array}{llll} 10 & (a+b) & = & 600 \\ 12 & (b+c) & = & 540 \\ 8 & (a+c) & = & 440 \end{array}\right. \qquad \Rightarrow \qquad \left\{\begin{array}{lll} a+b & = 60 & (1) \\ b+c & = 45 & (2) \\ a+c & = 55 & (3) \end{array}\right.$$

  $\Rightarrow a = 60 - b$ y $c = 45 - b$ sustituyendo en la tercera ecuación
  $(60 - b) + (45 - b) = 55$
  $\Rightarrow 105 - 2b = 55$
  $\Rightarrow b = 25$
  Así, $c = 45 - 25 = 20$ y la fábricas produce $20 \cdot 20 = 400$ televisores en 20 días.

2. (IIE, IIN, 2018) Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$. Considere los polinomios

$$p(x) = x^3 + ax^2 + x + 10$$

y

$$q(x) = x^4 + 7x^3 + bx^2 + 9x + c$$

Se sabe que $p(x)$ tiene tres raíces distintas y que cada una de las raíces de $p(x)$ es también raíz de $q(x)$. Determine los posibles valores de a, b y c.

Solución

Sea r la otra raíz de $q(x)$. Entonces se cumple que

$$\begin{aligned} q(x) &= (x-r)\,p(x) \\ &= x \cdot p(x) - r \cdot p(x) \\ &= x^4 + ax^3 + x^2 + 10x - rx^3 + rax^2 + rx + 10r \\ &= x^4 + (a-r)\,x^3 + (1-ra)\,x^2 + (10-r)\,x - 10r \end{aligned}$$

Igualando las dos expresiones para $q(x)$ se obtiene:

$$\begin{cases} 1 = 1 \\ a - r = 7 \\ 1 - ra = b \\ 10 - r = 9 \\ -10r = c \end{cases}$$

Así, $10 - r = 9 \Rightarrow r = 1$. Sustituyendo en la ecuación del término constante se obtiene que $c = -10$. Luego, $a - r = 7 \Rightarrow a - 1 = 7 \Rightarrow a = 8$. Finalmente, $b = -7$.