OLIMPIADAS COSTARRICENSES DE MATEMÁTICA
CAPACITACIÓN II ELIMINATORIA 2019
II NIVEL. TEMA: Geometría
DÍA 1. Sesión de la tarde

Enunciados y soluciones de los problemas

Selección única

1. (IIE, IIN, 2016) En un $\triangle ABC$, D es el punto medio de $\overline{AB}$, E es el punto medio de $\overline{DB}$ y F es el punto medio de $\overline{BC}$. Si el área del $\triangle ABC$ es 96, entonces el área del $\square AEFC$ es

   (a) 12

   (b) 24

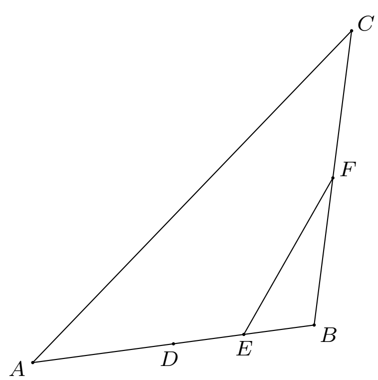
   (c) 48

   (d) 84

- Opción correcta: d)

- Solución:

  Sea h la medida de la altura del $\triangle ABC$ correspondiente con C. Dado que F es el punto medio de $\overline{BC}$, la medida de la altura del $\triangle EBF$ trazada desde F, h_1, satisface: $h_1 = \dfrac{h}{2}$.



  Además, la base $\overline{EB}$ del $\triangle EBF$ es la cuarta parte de la medida de la base $\overline{AB}$ del $\triangle ABC$.

  De acuerdo con el enunciado, el área del $\triangle ABC = 96 = \dfrac{AB \cdot h}{2}$. Usando este resultado se tiene que el área del $\triangle EBF = \dfrac{EB \cdot h_1}{2} = \dfrac{\frac{AB}{4} \cdot \frac{h}{2}}{2} = \dfrac{1}{8} \cdot \dfrac{AB \cdot h}{2} = \dfrac{1}{8} \cdot (ABC) = \dfrac{1}{8} \cdot 96 = 12.$

  Por lo tanto, $(AEFC) = 96 - 12 = 84$.

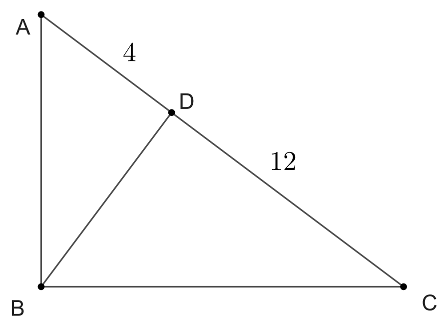
2. (IIE,IIN,2017) Los tres lados del $\triangle ABC$ se prolongan una distancia igual a sus respectivas longitudes, tal y como se observa en la figura adjunta. Si el área del $\square XCBY$ es 18 cm^2, entonces el área en cm^2 del $\triangle XYZ$ es

(a) 28

(b) 30

(c) 36

(d) 42



- Opción correcta: d
- Solución:

El $\triangle ABC$ tiene la misma base y la mitad de la altura del $\triangle AXY$ (esto con teorema de Tales o semejanza de triángulos al considerar las alturas desde B y desde Y sobre $\overline{AC}$ y $\overline{XC}$, respectivamente); por lo tanto, el $\triangle ABC$ tiene una área de 6 cm^2.

En forma similar, los triángulos $\triangle ZCX$ y $\triangle ZBY$ tienen áreas iguales a 12 cm^2 cada uno (el doble del área del $\triangle ABC$).

Por tanto el área del $\triangle XYZ$ es de 42 cm^2.

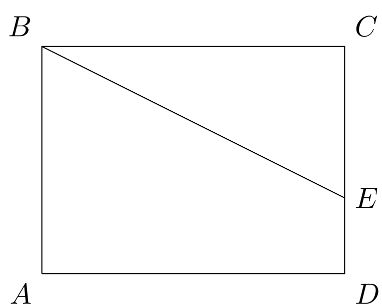
3. (IIE, IIN, 2018) En la figura adjunta, el $\square ABCD$ es un rectángulo, E es un punto sobre $\overline{CD}$, tal que $CE = 2DE$. Si el área del $\triangle BCE$ es 10 cm^2, entonces el área, en cm^2, del $\square ABCD$ corresponde a

(a) 25

(b) 30

(c) 35

(d) 40



- Opción correcta: (b)
- Solución:

Recuerde que el área de un triángulo es $\text{Área} = \dfrac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$. Luego, se tiene que $\dfrac{CE \cdot BC}{2} = 10$.

Ahora, considere el triángulo $\triangle BED$. Si consideramos como base $\overline{ED}$, entonces la altura es $\overline{CB}$, de la condición, $CE = 2DE \to DE = \dfrac{CE}{2}$, se obtiene que el área del $\triangle BED$ es

$$\frac{DE \cdot BC}{2} = \frac{CE/2 \cdot BC}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{CE \cdot BC}{2} = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$$

Finalmente, observe que $\triangle BCD \cong \triangle BAD$, luego,

$$(ABCD) = (BCD) + (BAD) = 15 + 15 = 30$$

4. (IIE, IIN, 2018) Sea el $\triangle ABC$ tal que $AB = AC$, y sean D y E puntos en $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$, respectivamente, tales que $AD = AE$. Si $m\angle BAD = 30°$, entonces $m\angle EDC$ corresponde a

   (a) $10°$

   (b) $15°$

   (c) $20°$

   (d) $25°$

- Opción correcta: (b)
- Solución:

  Sean $x = m\angle DAC$, $a = m\angle ABC = m\angle ACB$ ($\triangle ABC$ isósceles con $AB = AC$), $b = m\angle ADE = m\angle AED$ ($\triangle ADE$ isósceles con $AD = AE$).

  Por suma de medidas de ángulos internos en el $\triangle ABC$ se tiene que $2a + x + 30° = 180°$

  Por suma de medidas de ángulos internos en el $\triangle ADE$ se tiene que $2b + x = 180°$

  Entonces igualando tenemos:

  $$2a + x + 30° = 2b + x \Rightarrow 30° = 2b - 2a \Rightarrow 15° = b - a$$

  Por teorema de la medida del ángulo externo en el $\triangle DEC$, tenemos:

  $$b = a + m\angle EDC \Rightarrow b - a = m\angle EDC \Rightarrow 15° = m\angle EDC$$

5. (IIE, IIN, 2017) Sea el $\square ABCD$ un cuadrado en el que $AB = 3$. Sea E un punto tal que $B - C - E$ y sea F el punto de intersección de $\overline{AE}$ y $\overline{CD}$. Si $BE = 4$, entonces el área del $\square ABCF$ es

   (a) $4\frac{1}{4}$

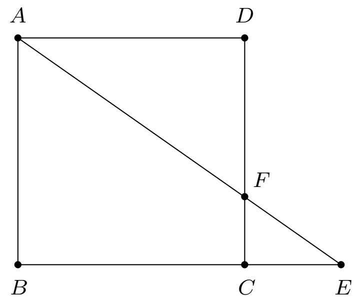
   (b) $5\frac{3}{8}$

   (c) $5\frac{1}{2}$

   (d) $5\frac{5}{8}$

- Opción correcta: d
- Solución:

  Considere al figura



Se tiene que $\overline{AB} \parallel \overline{FC}$ entonces $\triangle FCE \sim \triangle ABE$, entonces

$$\frac{FC}{AB} = \frac{CE}{BE} \Rightarrow \frac{FC}{3} = \frac{1}{4} \Rightarrow FC = \frac{3}{4}$$

El $\square ABCF$ es un trapecio, entonces

$$(ABCF) = \frac{(CF + AB)BC}{2} = \frac{\left(\frac{3}{4} + 3\right) \cdot 3}{2} = \frac{45}{8} = 5\frac{5}{8}$$

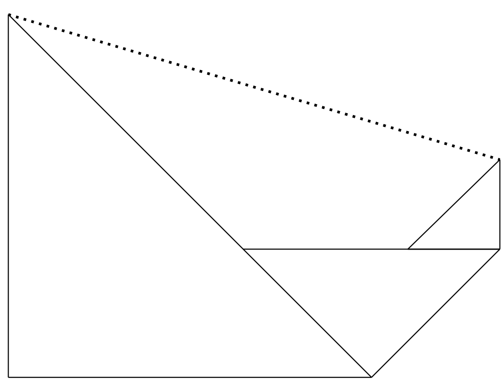
6. (IIE, IIN, 2018) En la figura adjunta se presentan tres triángulos rectángulos isósceles, donde la hipotenusa del triángulo mediano mide la mitad de la medida de la hipotenusa del grande, y la del pequeño la mitad de la medida de la hipotenusa del mediano. Si un cateto del triángulo pequeño mide 1 cm, entonces la longitud, en centímetros, de la línea punteada corresponde a

(a) $\sqrt{29 + 2\sqrt{2}}$

(b) $\sqrt{25 + 2\sqrt{2}}$

(c) $\sqrt{29 + \sqrt{2}}$

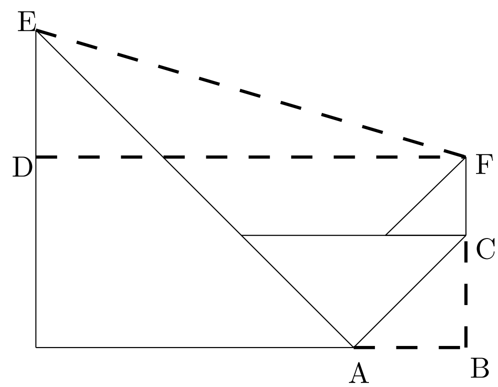
(d) $\sqrt{25 + \sqrt{2}}$



- Opción correcta: (a)
- Solución:

Por semejanza de triángulos, la relación entre las hipotenusas se mantiene entre los catetos, por lo que el cateto del triángulo mediano mide 2 y el del triángulo grande mide 4.

El $\triangle ABC$ es rectángulo isósceles cuya hipotenusa mide 2 cm, por lo que $AB = \sqrt{2}$; luego $DF = 4 + \sqrt{2}$ y $BF = 1 + \sqrt{2}$, por lo que $DE = 4 - \left(1 + \sqrt{2}\right) = 3 - \sqrt{2}$.



Aplicando el Teorema de Pitágoras en $\triangle DEF$ se tiene que

$$EF = \sqrt{\left(3-\sqrt{2}\right)^2 + \left(4+\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{29+2\sqrt{2}}$$

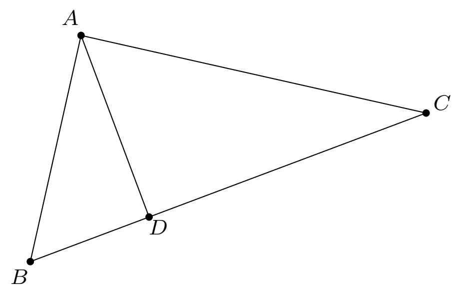
7. (IIE, IIN, 2017)En la figura adjunta, el $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo con $m\angle BAC = 90°$ y $\overline{AD} \perp \overline{BC}$. Si $BC = 5$ y $AC = 4$, entonces el área del $\triangle ADC$ es

   (a) 4

   (b) 5

   (c) $\dfrac{54}{25}$

   (d) $\dfrac{96}{25}$



- Opción correcta: d
- Solución:

  Con base en el teorema de Pitágoras aplicado en el $\triangle ABC$, se tiene que

$$\begin{aligned} & AB^2 + AC^2 = BC^2 \\ \Rightarrow\ & AB^2 = 25 - 16 = 9 \\ \Rightarrow\ & AB = 3 \end{aligned}$$

  En los triángulos rectángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DAC$ los ángulos agudos $\angle ABC$ y $\angle DAC$ son congruentes, ya que $\angle BAC \cong \angle ADC$ (ángulos rectos) y $\angle ACB \cong \angle DCA$ (mismo ángulo), por lo que $\triangle ABC \sim \triangle DAC$; así, $\dfrac{DA}{DC} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow DA = \dfrac{3}{4}DC$.

  Aplicando el teorema de Pitágoras en el $\triangle ADC$ se tiene que

$$\begin{aligned} & DA^2 + DC^2 = AC^2 \\ \Rightarrow\ & \left(\frac{3}{4}DC\right)^2 + DC^2 = 4^2 \\ \Rightarrow\ & \frac{9}{16}DC^2 + DC^2 = 16 \\ \Rightarrow\ & \frac{25}{16}DC^2 = 16 \\ \Rightarrow\ & DC^2 = 16 \cdot \frac{16}{25} \\ \Rightarrow\ & DC = \frac{16}{5} \end{aligned}$$

  Por lo que $DA = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{16}{5} = \dfrac{12}{5}$ y $(ADC) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{16}{5} \cdot \dfrac{12}{5} = \dfrac{96}{25}$.

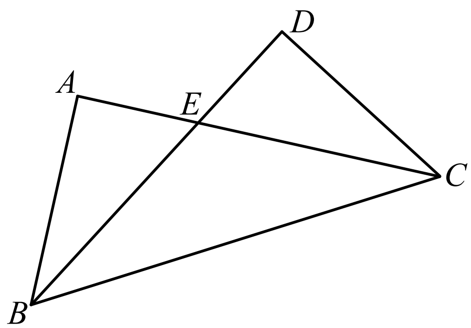
8. (IIE, IIN, 2016) En la figura adjunta los triángulos ΔABC y ΔDCB son triángulos rectángulos rectos en A y D, respectivamente. Si $\Delta ABC \cong \Delta DCB$, $BC = 12$ cm y $m\angle ACB = 30°$, el área del ΔBEC en cm^2 es

   (a) $6\sqrt{3}$

   (b) $8\sqrt{3}$

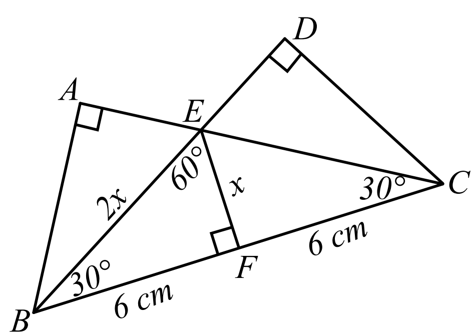
   (c) $9\sqrt{3}$

   (d) $12\sqrt{3}$



- Opción correcta: *d*)
- Solución:

  Dado que los triángulos ΔABC y ΔDCB son triángulos rectángulos y congruentes, ambos son $30° - 60° - 90°$. En la figura se muestran detalles asociados con las medidas de algunos de los ángulos y lados de los triángulos.



El ΔBCE es isósceles, pues en este se tiene que $m\angle BCE = m\angle CBE = 30°$, por la congruencia de los triángulos ΔABC y ΔDCB y el hecho que $m\angle ACB = 30°$. Luego, en el ΔBCE la altura $\overline{EF}$ es también mediatriz, por lo que $BF = FC = \dfrac{BC}{2} = 6$ cm.

Si $x = EF$, con base en el Teorema de Pitágoras se tiene que

$$\begin{aligned} & (2x)^2 - x^2 = 36 \\ \Rightarrow\ & 4x^2 - x^2 = 36 \\ \Rightarrow\ & 3x^2 = 36 \\ \Rightarrow\ & x^2 = 12 \\ \Rightarrow\ & x = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

El área del ΔBEC es $\dfrac{BC \cdot EF}{2} = \dfrac{12 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$.

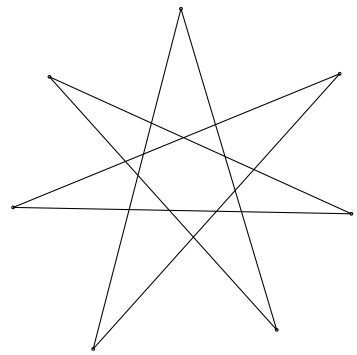
9. (IIE, IIN, 2016) La suma de las medidas de los ángulos de las siete puntas de la estrella adjunta es

   (a) $90°$

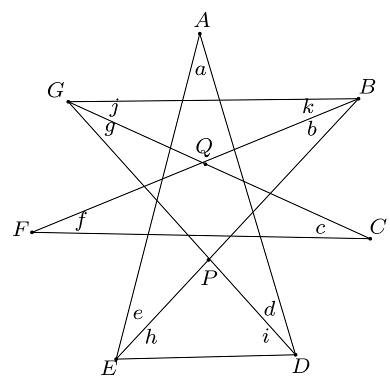
   (b) $180°$

   (c) $270°$

   (d) $360°$



- Opción correcta: b)
- Solución:
  Llamemos a, b, c, d, e, f, g las medidas de los ángulos respectivos, h, i, j, k las medidas de los ángulos indicados en la figura.
  Sean P, Q puntos de intersección de $\overline{BE}$ con $\overline{DG}$ y $\overline{CG}$ con $\overline{BF}$ respectivamente.
  En $\triangle AED$ se tiene $a+e+d+h+j=180°$ (1)
  En $\triangle EPD$ y $\triangle GPB$ se tiene $h+i=g+b+j+k$ (2), pues $\angle EPD \cong \angle GPB$.
  En $\triangle GQB$ y $\triangle FQC$ $f+c=j+k$ (3)
  Sustituyendo (3) en (2) se tiene $h+i=g+b+f+c$ y sustituyendo en (1) se tiene $a+e+d+g+b+f+c=180°$



10. (IIE, IIN,2018) Sea el $\triangle ABC$ tal que $AB=AC$, y sean D y E puntos en $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$, respectivamente, tales que $AD=AE$. Si $m\angle BAD=30°$, entonces $m\angle EDC$ corresponde a

    (a) $10°$

    (b) $15°$

    (c) $20°$

    (d) $25°$

- Opción correcta: (b)
- Solución:

  Sean $x=m\angle DAC$, $a=m\angle ABC=m\angle ACB$ ($\triangle ABC$ isósceles con $AB=AC$), $b=m\angle ADE=m\angle AED$ ($\triangle ADE$ isósceles con $AD=AE$).

  Por suma de medidas de ángulos internos en el $\triangle ABC$ se tiene que $2a+x+30°=180°$

  Por suma de medidas de ángulos internos en el $\triangle ADE$ se tiene que $2b+x=180°$

  Entonces igualando tenemos:

$$2a+x+30°=2b+x \Rightarrow 30°=2b-2a \Rightarrow 15°=b-a$$

  Por teorema de la medida del ángulo externo en el $\triangle DEC$, tenemos:

$$b = a + m\angle EDC \Rightarrow b - a = m\angle EDC \Rightarrow 15^\circ = m\angle EDC$$

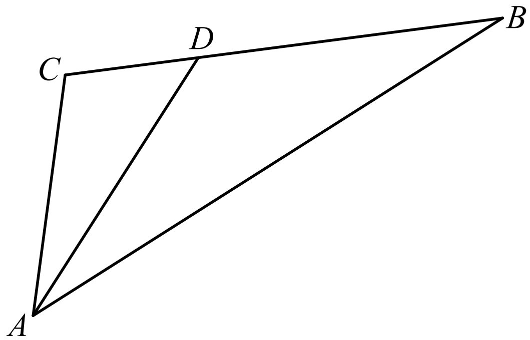
11. (IIE, IIN, 2015) En el ΔABC de la figura adjunta, $\overline{AD}$ es la bisectriz del $\angle BAC$ y $m\angle BAC = 2 \cdot m\angle ABC$. Si $c = AB$, $b = AC$ y $a = BC$, una expresión equivalente a $a^2 - b^2$ es

    (a) ac

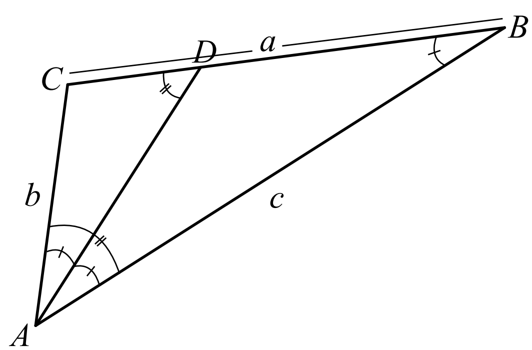
    (b) bc

    (c) $a + bc$

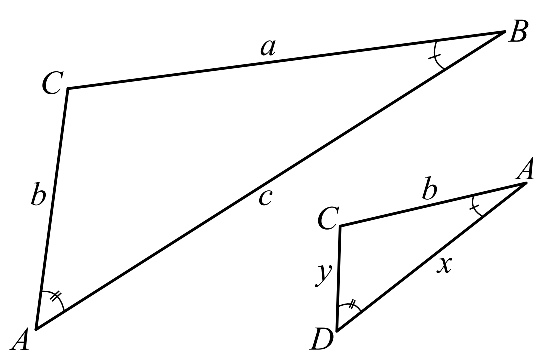
    (d) $b + ac$



- Opción correcta: b)
- Solución:
  Como $m\angle BAC = 2m\angle ABC$, se tiene que $\angle ABC \cong \angle DAB$, por lo que el ΔADB es isósceles.
  Por otra parte, $m\angle ADC = m\angle DAB + m\angle DBA = 2 \cdot m\angle ABC = m\angle BAC$.



Observando los ángulos formados en la figura anterior, se tiene que $\Delta ABC \sim \Delta DAC$.



Por semejanza de triángulos, se satisface que

$$\frac{x}{c} = \frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{bc}{a}$$

Además,

$$\begin{aligned} \frac{y}{b} &= \frac{b}{a} \\ \Rightarrow \quad y &= \frac{b^2}{a} \end{aligned}$$

Luego, en el ΔABC se tiene que el ΔADB es isósceles, por lo que

$$\begin{aligned} & DA = DB \\ \Rightarrow \quad & x = a - y \\ \Rightarrow \quad & \frac{bc}{a} = a - \frac{b^2}{a} \\ \Rightarrow \quad & bc = a^2 - b^2 \end{aligned}$$

12. (IIE, IIN, 2016) Sea el $\triangle ABC$ tal que $AB = 5, BC = 4, AC = 3$. Si $\overline{CD}$ es una altura, entonces $\dfrac{(ADC)}{(BDC)}$ es

    (a) $\dfrac{9}{25}$

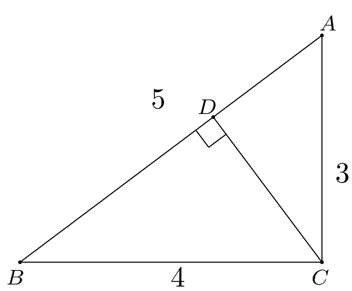
    (b) $\dfrac{16}{25}$

    (c) $\dfrac{9}{16}$

    (d) $\dfrac{16}{9}$

- Opción correcta: c)
- Solución:

  $(ABC) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$



$$\triangle ABC \sim \triangle CBD \Rightarrow \left(\frac{AB}{CB}\right)^2 = \frac{(ABC)}{(BDC)} \Rightarrow \left(\frac{5}{4}\right) = \frac{6}{(BDC)} \Rightarrow (BDC) = \frac{96}{25}$$

De forma análoga

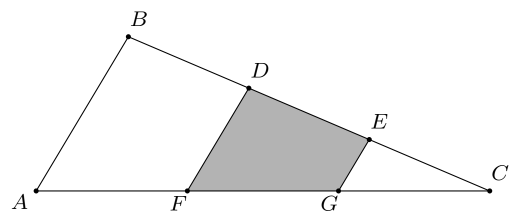
$$\triangle ABC \sim \triangle ADC \Rightarrow \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \frac{(ABC)}{(ADC)} \Rightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{6}{(ADC)} \Rightarrow (ADC) = \frac{54}{25}$$

Así tenemos $\dfrac{(ADC)}{(BDC)} = \dfrac{\frac{54}{25}}{\frac{96}{25}} = \dfrac{54}{96} = \dfrac{9}{16}$

Desarrollo

1. (IIE, IIN, 2016) En un $\triangle ABC$ se toman puntos D, E en $\overline{BC}$ de forma que $BD = DE = EC$ y puntos F, G en $\overline{AC}$ de forma que $\overline{DF} \| \overline{EG} \| \overline{AB}$. Determine $\dfrac{(DEGF)}{(ABC)}$

- Solución:



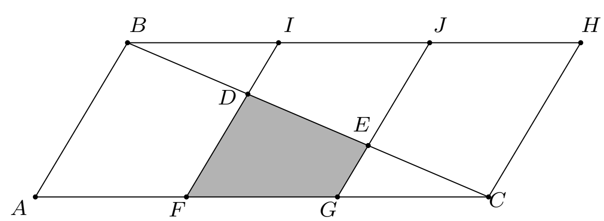
Trazamos por B una recta paralela a $\overline{AC}$ y por C una paralela a $\overline{AB}$ y sea H la intersección de estas rectas. Se tiene que $\square ABHC$ es un paralelogramo. Llamemos I, J las intersecciones de $\overleftrightarrow{DF}$ y $\overleftrightarrow{EG}$ con $\overline{BH}$ respectivamente.

Se observa también que $\square BIFA, \square IJGF$ y $\square JHCG$ son paralelogramos de igual área, pues como D y E trisecan a $\overline{BC}$, F y G trisecan a $\overline{AC}$, e I y J trisecan a $\overline{BH}$

Además $\triangle ABC \cong \triangle HCB$ y entonces $(DEGH) = (EDIJ)$.

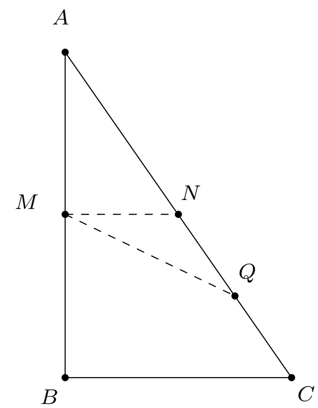
Entonces $(BHCA) = 2(ABC) = 3(IJGF) = 3 \cdot 2(DEGF)$

Por lo tanto $(ABC) = 3(DEGF)$ y entonces $\dfrac{(DEGF)}{(ABC)} = \dfrac{1}{3}$



2. (IIE, IIN, 2017) Sea el $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo, tal que $m\angle ABC = 90°$ y $AB = 12$ cm. Sea Q un punto tal que $A - Q - C$ y $AQ = 3CQ$. Si M el punto medio de $\overline{AB}$ y el área del $\square BMQC = 30$ cm^2, determine CQ.

Solución:



Sea N el punto medio de $\overline{AC}$, así tenemos:

$AQ + CQ = AC \Rightarrow 3CQ + CQ = AC \Rightarrow CQ = \dfrac{1}{4}AC = \dfrac{1}{2}CN$

$\overline{BC} \parallel \overline{MN}$ y $BC = 2MN$.

Si h es la medida de la altura del $\triangle MNQ$ desde el punto Q, entonces $h = \dfrac{1}{2}BM = \dfrac{1}{4}AB = 3$ cm.

Así tenemos:

$$
\begin{aligned}
(BMNC) = (MNQ) + (BMQC) \quad & \Rightarrow \quad (BMNC) = \frac{1}{2}(MN + BC) \cdot BM = \frac{1}{2}MN \cdot h + 30 \\
& \Rightarrow \quad \frac{1}{2}(MN + 2MN) \cdot \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}MN \cdot 3 + 30 \\
& \Rightarrow \quad \frac{1}{2}3MN \cdot \frac{1}{2}12 = \frac{1}{2}MN \cdot 3 + 30 \\
& \Rightarrow \quad 9MN = \frac{3}{2}MN + 30 \\
& \Rightarrow \quad 9MN - \frac{3}{2}MN = 30 \\
& \Rightarrow \quad \frac{15}{2}MN = 30 \\
& \Rightarrow \quad MN = 4
\end{aligned}
$$

Así, se tiene que $BC = 8$ cm. y por Pitágoras se tiene que

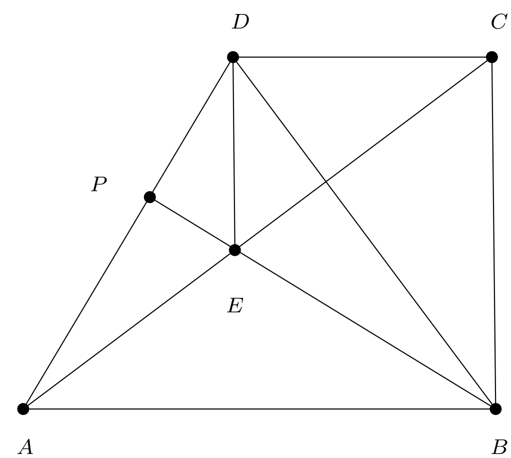
$12^2 + 8^2 = AC^2 \Rightarrow AC = \sqrt{208}$ cm. $= 2\sqrt{52}$ cm.

Por lo tanto, $CQ = \dfrac{\sqrt{52}}{2}$ cm.

3. (IIE, IIN, 2015) Se tiene un triángulo rectángulo ΔABC, recto en B. Sea H el pie de la altura desde B hasta $\overline{AC}$. Una paralela a $\overline{AB}$ a través del punto C corta a $\overleftrightarrow{BH}$ en el punto D. Una paralela a $\overline{BC}$ a través del punto D corta a $\overleftrightarrow{AC}$ en E. Sea P el punto de intersección de $\overleftrightarrow{AD}$ con $\overleftrightarrow{BE}$. Determine la medida del $\angle APB$.

Solución

Considere la siguiente figura



Como la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°, en un trińgulo rectángulo se tiene que la suma de los ángulos agudos es 90°. Por lo tanto, se puede ver que

$$m\angle HAB = 90^\circ - m\angle HBA = m\angle HBC = m\angle HCD = m\angle HDE$$

De modo que $\angle HAB \cong \angle HDE$, y por tener dos ángulos congruentes entonces $\triangle HAB \sim \triangle HDE$.

De la semejanza se tiene que

$$\frac{HA}{HB} = \frac{HD}{HE} \text{ y } \frac{HA}{HD} = \frac{HB}{HE},$$

Por lo tanto $\triangle HAD \sim \triangle HBE$ y se tiene que $m\angle HAD = m\angle HBE$. Comparando los ángulos en los triángulos ΔAPE y ΔBHE, que resultan semejantes, se tiene que $m\angle APE = m\angle BHE = 90^\circ$.