OLIMPIADAS COSTARRICENSES DE MATEMÁTICA
CAPACITACIÓN II ELIMINATORIA 2019
III NIVEL. TEMA: Álgebra
Día 1. Sesión de la mañana

Enunciados y soluciones de los problemas

1. (IIE, IIIN, 2015) La cantidad de soluciones (x, n), donde ambos son enteros positivos y n es par, de la ecuación $x^2 + 7 = 2^n$ es

   (a) 1
   (b) 2
   (c) 3
   (d) 0

   Solución:

   Respuesta correcta: Opción a)

   Sea $n = 2k$, con k entero positivo. Entonces,

   $$x^2 + 7 = 2^{2k} \Rightarrow$$

   $$7 = 2^{2k} - x^2 \Rightarrow$$

   $$7 = (2^k - x)(2^k + x).$$

   Como 7 es primo, y $2^k + x$ es positivo, entonces la única opción es $1 = 2^k - x$ y $7 = 2^k + x$ (pues $2^k + x > 2^k - x$). Sumando ambas ecuaciones tenemos que $8 = 2^{k+1}$, por lo que $k = 2$. En consecuencia, $x = 3$. Por lo tanto, solo hay una solución, a saber, $(x, n) = (3, 4)$.

2. (IIE, IIIN, 2015) Si a, b son números reales positivos tales que

   $$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{8}{3},\ a^2 + b^2 = \frac{5}{2},$$

   determine el valor de $a \cdot b$

   (a) $\frac{3}{8}$

(b) 3

(c) $\dfrac{3}{4}$

(d) $\dfrac{8}{3}$

Solución:

Respuesta correcta: Opción c)

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{8}{3} \quad &\Longrightarrow \quad \frac{a+b}{ab}=\frac{8}{3}\\
&\Longrightarrow \quad 3(a+b)=8ab\\
&\Longrightarrow \quad 9(a+b)^2=(8ab)^2\\
&\Longrightarrow \quad 9(a^2+2ab+b^2)=64a^2b^2\\
&\Longrightarrow \quad 9(\tfrac{5}{2}+2ab)=64a^2b^2 \qquad \text{sustituyendo } \ a^2+b^2=\frac{5}{2}\\
&\Longrightarrow \quad \tfrac{45}{2}+18ab=64a^2b^2\\
&\Longrightarrow \quad 45+36ab=128a^2b^2\\
&\Longrightarrow \quad 0=128a^2b^2-36ab-45 \quad \text{resolviendo la cuadrática para } ab\\
&\Longrightarrow \quad ab=\tfrac{3}{4} \ \ o \ \ ab=\tfrac{-15}{32}
\end{aligned}
$$

Como a, b son números positivos entonces $ab=\frac{3}{4}$

3. (IIE, IIIN, 2015) Sean x_1 y x_2 dos números reales tales que $x_1 \neq x_2$, $3x_1^2-hx_1=a$ y $3x_2^2-hx_2=a$, con $a>0$. Una expresión equivalente a x_1+x_2 es

a) $\dfrac{a}{3}$

b) $\dfrac{h}{3}$

c) $\dfrac{-a}{3}$

d) $\dfrac{-h}{3}$

Solución:

Respuesta correcta: Opción b)

Al considerar la ecuación $3x_1^2-hx_1=a$ se tiene que $3x_1^2-hx_1-a=0$. Luego, con base en la fórmula general, se tiene que: $x_1=\dfrac{-(-h)\pm\sqrt{(-h)^2-4\cdot 3\cdot(-a)}}{2\cdot 3}=\dfrac{h\pm\sqrt{h^2+12a}}{6}$.

En forma análoga, para la ecuación $3x_2^2 - hx_2 = a$ se tiene que $x_2 = \dfrac{h \pm \sqrt{h^2+12a}}{6}$.

Como $x_1 \neq x_2$, si $x_1 = \dfrac{h + \sqrt{h^2+12a}}{6}$ entonces $x_2 = \dfrac{h - \sqrt{h^2+12a}}{6}$.

Así, $x_1 + x_2 = \dfrac{h + \sqrt{h^2+12a}}{6} + \dfrac{h - \sqrt{h^2+12a}}{6} = \dfrac{2h}{6} = \dfrac{h}{3}$.

Otra solución:

$$
\begin{aligned}
3x_1^2 - hx_1 = a\ ,\ 3x_2^2 - hx_2 = a \quad &\Longrightarrow\quad 3x_1^2 - hx_1 = 3x_2^2 - hx_2\\
&\Longrightarrow\quad 3x_1^2 - 3x_2^2 = hx_1 - hx_2\\
&\Longrightarrow\quad 3(x_1^2 - x_2^2) = h(x_1 - x_2)\\
&\Longrightarrow\quad 3(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = h(x_1 - x_2)\\
&\Longrightarrow\quad 3(x_1 + x_2) = h\\
&\Longrightarrow\quad (x_1 + x_2) = \frac{h}{3}
\end{aligned}
$$

4. (IIE, IIIN, 2016) Al simplificar $\dfrac{2016 \cdot 2017^2 - 3 \cdot 2016^2}{2016^3 + 1}$ se obtiene

   (a) 1

   (b) $\dfrac{1}{2}$

   (c) $\dfrac{2017}{2016}$

   (d) $\dfrac{2016}{2017}$

- Opción correcta: (d)
- Solución:

$$
\begin{aligned}
\frac{2016 \cdot 2017^2 - 3 \cdot 2016^2}{2016^3 + 1} &= \frac{2016 \cdot (2016+1)^2 - 3 \cdot 2016^2}{2016^3 + 1}\\
&= \frac{2016\left[(2016+1)^2 - 3 \cdot 2016\right]}{2016^3 + 1}\\
&= \frac{2016\left[2016^2 + 2 \cdot 2016 + 1 - 3 \cdot 2016\right]}{(2016+1)(2016^2 - 2016 + 1)}\\
&= \frac{2016\left[2016^2 - 2016 + 1\right]}{(2016+1)(2016^2 - 2016 + 1)}\\
&= \frac{2016}{2017}
\end{aligned}
$$

5. (IIE, IIIN, 2016) Considere los puntos $A-B-C-D-E$ de tal manera que $AC \cdot BE = CD + 7BC$, donde $AB = DE = 1$ y CD excede en dos a DE. La medida de $\overline{BC}$ es

(a) 1
(b) 2
(c) 3
(d) 4

- Opción correcta: (a)
- Solución:

Se tiene que $A - B - C - D - E$, entonces por la definión de estar entre, la igualdad dada se puede expresar de la siguiente manera:

$$(AB + BC) \cdot (BC + CD + DE) = CD + 7BC$$

Sea $BC = x$. Como $AB = DE = 1$ y $CD = DE + 2 = 3$, entonces la igualdad se expresa de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
& (1+x)(x+4) &&= 3 + 7x \\
\Rightarrow\ & x + 4 + x^2 + 4x &&= 3 + 7x \\
\Rightarrow\ & x^2 - 2x + 1 &&= 0 \\
\Rightarrow\ & (x-1)(x-1) &&= 0 \\
\Rightarrow\ & x &&= 1
\end{aligned}$$

$\therefore BC = 1$

6. (IIE, IIIN, 2016) La cantidad de números de dos dígitos de la forma ab, donde a y b satisfacen $\dfrac{a}{b} - \dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$, corresponde a

(a) 5
(b) 8
(c) 11
(d) 13

- Opción correcta: (b)
- Solución:

De acuerdo a la condición dada, a y b son diferente de cero, entonces se tiene:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b}-\frac{b}{a} &= \frac{1}{a}+\frac{1}{b}\\
\frac{a^2-b^2}{ba} &= \frac{b+a}{ab}\\
a^2-b^2 &= b+a\\
(a-b)(a+b) &= b+a\\
a-b &= 1\\
a &= b+1
\end{aligned}$$

Para que la igualdad se cumpla, a tiene que tomar valores entre 2 y 9, se tiene que

- Si $a=2$ entonces $b=1$
- Si $a=3$ entonces $b=2$
- Si $a=4$ entonces $b=3$
- Si $a=5$ entonces $b=4$
- Si $a=6$ entonces $b=5$
- Si $a=7$ entonces $b=6$
- Si $a=8$ entonces $b=7$
- Si $a=9$ entonces $b=8$

Los números encontrados son: 21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98. Por lo tanto, la cantidad de números son 8.

7. (IIE, IIIN, 2016) Si $a \neq b$, $a^3-b^3=19x^3$ y $a-b=x$, el conjunto de todos los posibles valores para a es

   (a) $\{-3x\}$

   (b) $\{-2x\}$

   (c) $\{3x,-2x\}$

   (d) $\{-3x,2x\}$

- Opción correcta: (c)
- Solución:

$$
\begin{aligned}
a^3-b^3=19x^3 \quad &\Rightarrow \quad (a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)=19x^3\\
&\Rightarrow \quad x\left(a^2+ab+b^2\right)=19x^3\\
&\Rightarrow \quad a^2+ab+b^2=19x^2\\
&\Rightarrow \quad a^2+a\left(a-x\right)+\left(a-x\right)^2=19x^2\\
&\Rightarrow \quad a^2+a^2-ax+a^2-2ax+x^2=19x^2\\
&\Rightarrow \quad 3a^2-3ax-18x^2=0\\
&\Rightarrow \quad 3\left(a^2-ax-6x^2\right)=0\\
&\Rightarrow \quad 3\left(a-3x\right)\left(a+2x\right)=0\\
&\Rightarrow \quad a=3x \vee a=-2x
\end{aligned}
$$

8. (IIE, IIIN, 2017) Sean a, b y c números reales, con $a \neq c$. Sean

$$P(x)=3x^4+ax^3+bx^2+cx+2$$

$$Q(x)=3x^4+cx^3+bx^2+ax+2$$

Las condiciones que deben cumplir los números a, b y c para que los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ tengan dos raíces comunes son

(a) $a=3$ y $b=c$

(b) $b=-5$ y $a=-c$

(c) $c=-3$ y $a=b$

(d) $b=5$ y $c=2a$

- Opción correcta: b
- Solución:

Para que $P(x)=Q(x)=0$ se tiene que $P(x)-Q(x)=(a-c)x^3+(c-a)x=(a-c)x(x-1)(x+1)=0$.

Esto nos dice que las posibles raíces comunes deben ser 0, 1 o -1 y no puede haber una raíz doble común. Ahora $x=0$ no es raíz de ninguno de los polinomios.

Por otra parte $P(1)=Q(1)=0$ implica que $a+b+c+5=0$ y $P(-1)=Q(-1)=0$ implica que $-a+b-c+5=0$, de donde $b=-5$ y $a=-c$

9. (IIE, IIIN, 2017) Si se tiene que n es un entero positivo y que la fracción $\dfrac{n^2+6n}{n+1}$ es un entero, entonces el valor de esta fracción es

(a) 0

(b) 5

(c) 8

(d) 15

- Opción correcta: c
- Solución:

  Como la fracción es entera entonces

  $$\frac{(n^2+6n)-n(n+1)-5(n+1)}{n+1}=\frac{-5}{n+1}$$

  es un entero.

  Por lo tanto $n+1=5$ y el valor de la fracción es $\dfrac{4^2+6\cdot 4}{5}=8$.

10. (IIE, IIIN, 2017) Suponga que $P(x)$ es un polinomio de grado cuatro, con coeficiente principal igual a uno. Se sabe que para un número n, $P(n-2)=1$, $P(n-1)=1$, $P(n)=1$ y $P(n+1)=1$. El valor de $P(n+5)-P(n-4)$ es

    (a) 720

    (b) 360

    (c) 120

    (d) 0

- Opción correcta: a
- Solución:

  Sea $R(x)=P(x)-1$.

  De acuerdo con las hipótesis del enunciado, $n-2$, $n-1$, n y $n+1$ son ceros de $R(x)$; de esta manera:

  $$R(x)=(x-(n-2))(x-(n-1))(x-n)(x-(n+1))$$
  $$\Rightarrow P(x)=(x-n+2)(x-n+1)(x-n)(x-n-1)+1$$

  Entonces $P(n+5)-P(n-4)$ es

  $(n+5-n+2)(n+5-n+1)(n+5-n)(n+5-n-1)-(n-4-n+2)(n-4-n+1)(n-4-n)(n-4-n-1)=720$

11. La cantidad máxima de valores enteros que puede tomar n para los cuales la ecuación $x^2+nx-n=0$ tenga soluciones enteras es

    (a) 1

    (b) 2

    (c) 3

    (d) 4

- Opción correcta: b
- Solución:

  Utilizando fórmula general, el discriminante de x^2+nx-n debe cumplior que $n^2+4n=k^2$, con k entero.

Entonces $n^2+4n+4 = k^2+4 \Rightarrow (n+2)^2 = k^2+4 \Rightarrow (n+2)^2-k^2 = 4 \Rightarrow (n+2+k)(n+2-k) = 4$.

De lo anterior, se tienen los sistemas:

$n+2+k = 1 \wedge n+2-k = 4$ con soluciones $k = \dfrac{-3}{2} \wedge n = \dfrac{1}{2}$

$n+2+k = -1 \wedge n+2-k = -4$ con soluciones $k = \dfrac{3}{2} \wedge n = \dfrac{-9}{2}$

$n+2+k = 4 \wedge n+2-k = 1$ con soluciones $k = \dfrac{3}{2} \wedge n = \dfrac{1}{2}$

$n+2+k = -4 \wedge n+2-k = -1$ con soluciones $k = \dfrac{-3}{2} \wedge n = \dfrac{-9}{2}$

$n+2+k = 2 \wedge n+2-k = 2$ con soluciones $k = 0 \wedge n = 0$

$n+2+k = -2 \wedge n+2-k = -2$ con soluciones $k = 0 \wedge n = -4$

De los cuales solo los dos últimos tienen soluciones enteras, con $n = 0$ y $n = -4$, que dan soluciones para x ($x = 0$ y $x = 2$).

Por lo que la cantidad de valores de n enteros para los cuales la ecuación tiene soluciones enteras es 2.

12. (IIE, IIIN, 2016) Determine todos los valores de n, con $n \in \mathbb{N}$, que satisfacen

$$18 + 22 + 26 + 30 + 34 + \cdots + n = 2016$$

Solución : La expresión la podemos escribir como:

$$18 + (18 + 4 \cdot 1) + (18 + 4 \cdot 2) + \cdots + (18 + 4 \cdot k) = 2016$$

donde $n = 18 + 4k$, para algún $k \in \mathbb{N}$.

Entonces

$$\begin{aligned}
18 + (18 + 4 \cdot 1) + (18 + 4 \cdot 2) + \cdots + (18 + 4 \cdot k) = 2016 \quad &\Rightarrow \quad 18(k+1) + 4(1+2+3+\cdots k) = 2016 \\
&\Rightarrow \quad 18(k+1) + 4\frac{k(k+1)}{2} = 2016 \\
&\Rightarrow \quad 18k + 18 + 2k^2 + 2k = 2016 \\
&\Rightarrow \quad 2k^2 + 20k - 1998 = 0 \\
&\Rightarrow \quad k^2 + 10k - 999 = 0 \\
&\Rightarrow \quad (k-27)(k+37) = 0 \\
&\Rightarrow \quad k = 27 \;\; o \;\; k = -37 \\
&\Rightarrow \quad k = 27 \;\; \text{pues} \;\; k \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Por tanto $k = 27$ y $n = 126$.