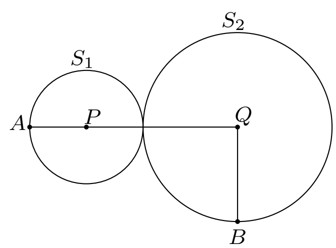
OLIMPIADAS COSTARRICENSES DE MATEMÁTICA
CAPACITACIÓN II ELIMINATORIA 2019
III NIVEL. TEMA: Geometría
Día 1. Sesión de la tarde

Enunciados y soluciones de los problemas

1. (IIE, IIIN, 2015) En la figura P y Q son los centros de las circunferencias tangentes S_1 y S_2, la recta $\overleftrightarrow{PQ}$ corta la circunferencia S_1 en A y el radio $\overline{QB}$ es perpendicular a $\overline{PQ}$. Si la suma de las áreas de los círculos es 10π y el área del $\triangle AQB$ es 8, determine la longitud de $\overline{PB}$.



(a) $\sqrt{40}$
(b) $\sqrt{26}$
(c) 5
(d) 6

Solución:

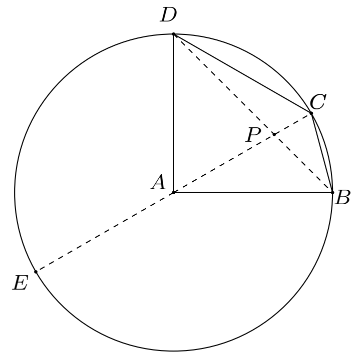
Respuesta correcta: Opción b)

Sean r y R los radios de S_1 y S_2 respectivamente. Como $\pi r^2 + \pi R^2 = 10$, tenemos que $R^2 + r^2 = 10$. Además $(AQB) = 8 \Longrightarrow \dfrac{R(R+2r)}{2} = 8$, por lo que $(2r+R)R = 16$.

Por otra parte, aplicando el Teorema de Pitágoras en $\triangle PBQ$

$$PB = \sqrt{(r+R)^2 + R^2} = \sqrt{r^2 + 2rR + R^2 + R^2} = \sqrt{(r^2+R^2) + (2r+R)R} = \sqrt{26}$$

2. (IIE, IIIN, 2016) Considere la figura siguiente en la cual A es el centro de la circunferencia y $\overline{CE}$ es un diámetro. Si $m\widehat{ED}$ y $m\widehat{EB}$ están en la razón $4:5$ y $\angle DAB$ es recto, entonces $m\angle DPA$ es



(a) $30°$

(b) $45°$

(c) $60°$

(d) $75°$

- Opción correcta: (d)
- Solución:

  De la razón dada tenemos que $4x + 5x = 270°$, asi se tiene que $x = 30°$ y en entonces $m\widehat{BD} = 120°$, de donde $m\angle DCE = 60°$ y entonces $\triangle ADC$ es equilátero y así $m\angle ADC = 60°$. De aquí se tiene que $m\widehat{DC} = 60°$ por ser un ángulo central.

  Entonces $m\widehat{DCB} = m\widehat{DC} + \widehat{BC}$ y así $m\widehat{BC} = 30°$.
  De lo anterior $m\angle BDC = 15°$ por ser ángulo semi-inscrito, y por teorema del ángulo externo $m\angle DPA = 75°$.

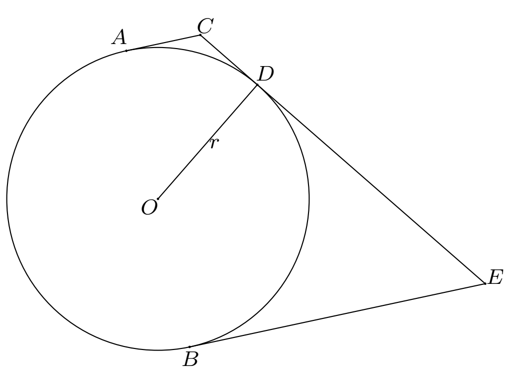
3. (IIE, IIIN, 2016) En la figura adjunta, $\overline{AC}$ y $\overline{BE}$ son paralelas y tangentes a un círculo de radio r, con A y B los puntos de tangencia. Se sabe que $C - D - E$ y que $\overline{CE}$ es otra tangente a la circunferencia con D el punto de tangencia. Si $AC = 2$ y $BE = 8$, entonces el valor de r es

   (a) 3

   (b) 4

   (c) 5

   (d) 6

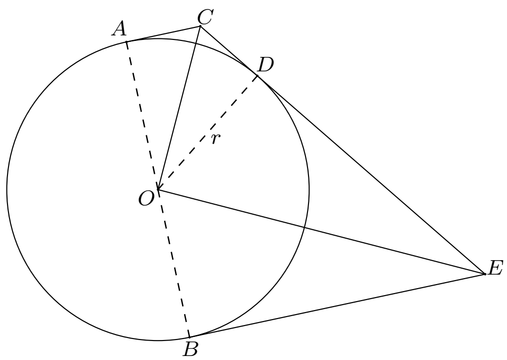


- Opción correcta: (b)
- Solución:

  Dado que $AC = DC = 2$, $OA = OD = r$ y $m\angle ODC = m\angle OAC = 90°$, entonces $\triangle OAC \cong \triangle ODC$. En forma similar, $BE = DE = 8$, $OD = OB = r$ y $m\angle ODE = m\angle OBE = 90°$ por lo que $\triangle ODE \cong \triangle OBE$.

  Note que $\overline{AB}$ es un diámetro de la circunferencia pues $\overline{AC} \parallel \overline{BE}$ y ambos segmentos son tangentes en A y B, respectivamente, a la circunferencia.

  Si se definen $\alpha = m\angle AOC = m\angle DOC$ y $\beta = m\angle DOE = m\angle BOE$ se cumple que $2\alpha + 2\beta = 180° \Rightarrow \alpha + \beta = 90° = m\angle COE$.



  De lo anterior se concluye que $\triangle COE$ es un triángulo rectángulo, recto en O, donde $\overline{OD}$ es su altura correspondiente con el vértice O. Dado que $\triangle ODC \sim \triangle EOC \sim \triangle EDO \Rightarrow \triangle ODC \sim \triangle EDO$, se tiene que $\dfrac{OD}{ED} = \dfrac{DC}{DO} \Rightarrow \dfrac{r}{8} = \dfrac{2}{r} \Rightarrow r^2 = 16 \Rightarrow r = 4$.

4. (IIE, IIIN, 2017) Considere el cuadrado $\square ABCD$, con $AB = 8$ cm. Una circunferencia tangente a $\overline{BC}$ contiene a los vértices A y D. La longitud, en centímetros, del radio de la circunferencia es

   (a) 4

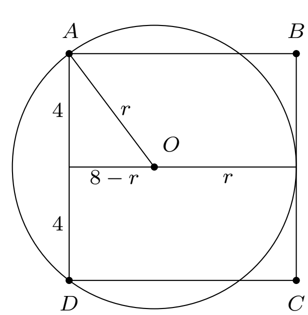
   (b) 5

   (c) 6

   (d) $4\sqrt{2}$

- Opción correcta: b
- Solución:

  Considere la figura



Se tiene que O es el centro de la circunferencia y entonces por Pitágoras se tiene:

$$r^2 = 4^2 + (8-r)^2 \Rightarrow 16r = 80 \Rightarrow r = 5$$

5. (IIE, IIIN, 2017) Sea el $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo, tal que $m\angle ACB = 90°$, $AC = 3$ y $CB = 4$. Sea O un punto tal que $A - O - B$. Si una circunferencia de centro O es tangente a $\overline{AC}$ en Q y a $\overline{BC}$ en P, entonces OP es

   (a) $\dfrac{12}{7}$

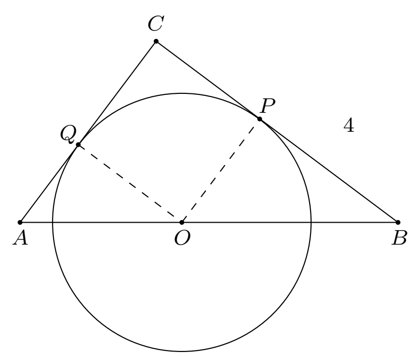
   (b) $\dfrac{7}{12}$

   (c) $\dfrac{9}{7}$

   (d) 6

- Opción correcta: a
- Solución:

  Considere la figura



Se tiene que $\overline{OQ} \perp \overline{AC}$ y $\overline{OP} \perp \overline{CB}$

Sean $OP = OQ = r$, por ser radios.

$$(ABC) = (AOC) + (BOC) \Rightarrow \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{AC \cdot OQ}{2} + \frac{BC \cdot OP}{2} \Rightarrow 6 = \frac{7r}{2} \Rightarrow \frac{12}{7} = r$$

$\therefore OP = \dfrac{12}{7}$

6. (IIE, IIIN, 2016) Si en un $\triangle ABC$, $m\angle ABC = 2m\angle ACB$, $AC = 2BC$ y $AB = 4$, entonces BC es

   (a) $\dfrac{1+\sqrt{11}}{2}$

   (b) $\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$

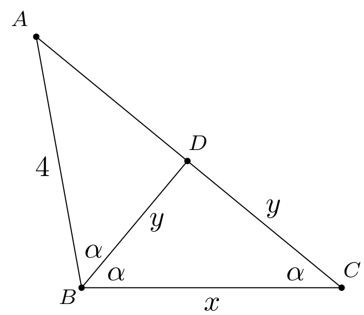
   (c) $\dfrac{1+\sqrt{15}}{2}$

(d) $\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$

- Opción correcta: (d)
- Solución:

  Sea $x = BC$, $\alpha = m\angle ACB$ y D la intersección de la bisectriz de $\angle ABC$ con $\overline{AC}$. Llamemos $y = CD$

  Vemos que $\triangle BDC$ es isósceles, por lo que $BD = y$. Además $\triangle ABD \sim \triangle ACB$, pues comparten el ángulo A y tienen un ángulo de medida α.



  Por la semejanza se tiene que

  $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BD}{CB} = \dfrac{AD}{AB}$ de donde $\dfrac{4}{2x} = \dfrac{y}{x} = \dfrac{2x-y}{4}$
  Entonces, $\dfrac{4}{2x} = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y = 2$

  Por lo tanto $\dfrac{4}{2x} = \dfrac{2x-y}{4} \Rightarrow \dfrac{2}{x} = \dfrac{2x-2}{4} \Rightarrow x^2 - x - 4 = 0$

  Resolviendo esta ecuación se tiene $x = \dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$

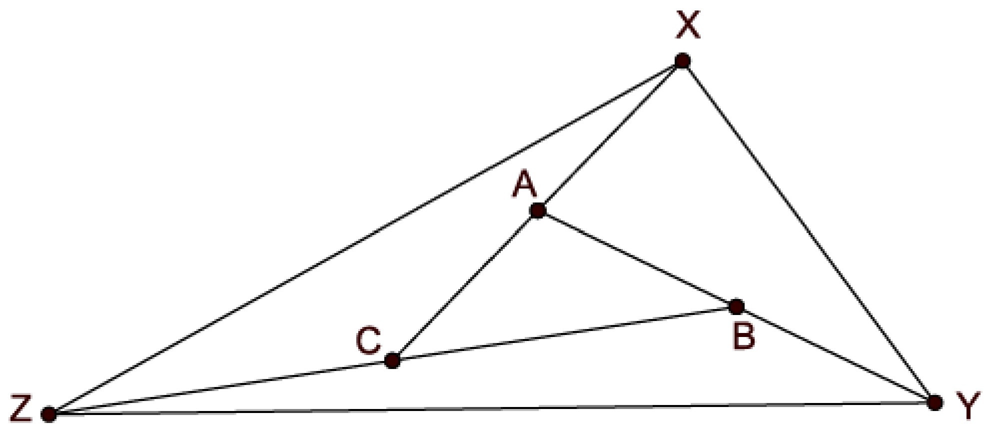
7. (IIE, IIIN, 2017) Los tres lados del $\triangle ABC$ se prolongan una distancia igual a sus respectivas longitudes, tal y como se observa la figura adjunta. Si el área del $\square XCBY$ es 18 cm^2, entonces el área en cm^2 del $\triangle XYZ$ es

(a) 28

(b) 30

(c) 36

(d) 42



- Opción correcta: d
- Solución:

  El $\triangle ABC$ tiene la misma base y la mitad de la altura del $\triangle AXY$ (esto con teorema de Tales o semejanza de triángulos al considerar las alturas desde B y desde Y sobre $\overline{AC}$ y $\overline{XC}$, respectivamente); por lo tanto, el $\triangle ABC$ tiene una área de 6 cm^2.

  En forma similar, los triángulos $\triangle ZCX$ y $\triangle ZBY$ tienen áreas iguales a 12 cm^2 cada uno (el doble del área del $\triangle ABC$).

  Por tanto el área del $\triangle XYZ$ es de 42 cm^2.

8. (IIE, IIIN, 2015) Dado el cuadrado $\square ABCD$ de lado 2 y una semicircunferencia de diámetro $\overline{AD}$ que está contenida en él. Sea E un punto tal que $A - E - B$ y $\overline{CE}$ es tangente a la semicircunferencia, determine el área del $\triangle CBE$

   (a) 1

   (b) $\dfrac{3}{2}$

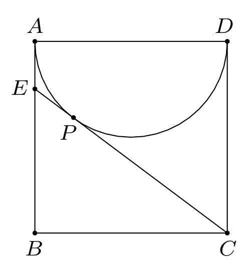
   (c) 2

   (d) $\dfrac{5}{2}$

   Solución:

   Respuesta correcta: Opción b)

   Considere la figura siguiente en donde P es el punto de tangencia de $\overline{EC}$ con la semi-circunferencia.



$AE = PE$ por ser tangentes desde un punto externo, sea $AE = PE = x$.

$DC = PC$ por ser tangentes desde un punto externo, así$PC = 2$

Entonces $BE = 2 - x$ y $EC = 2 + x$, aplicando Pitágoras al $\triangle EBC$ tenemos que

$$(2-x)^2 + 4 = (2+x)^2 \Rightarrow 4 - 4x + x^2 + 4 = 4 + 4x + x^2 \Rightarrow 4 = 8x \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Ahora, el área del $\triangle CBE$ viene dada por $\frac{1}{2} \cdot EB \cdot BC$ es decir $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 2 = \frac{3}{2}$

9. (IIE, IIIN, 201) La cantidad máxima de valores enteros que puede tomar n para los cuales la ecuación $x^2 + nx - n = 0$ tenga soluciones enteras es

   (a) 1

   (b) 2

   (c) 3

   (d) 4

- Opción correcta: b
- Solución:

  Utilizando fórmula general, el discriminante de $x^2 + nx - n$ debe cumplior que $n^2 + 4n = k^2$, con k entero.

  Entonces $n^2+4n+4 = k^2+4 \Rightarrow (n+2)^2 = k^2+4 \Rightarrow (n+2)^2-k^2 = 4 \Rightarrow (n+2+k)(n+2-k) = 4$.

  De lo anterior, se tienen los sistemas:

  $n+2+k = 1 \wedge n+2-k = 4$ con soluciones $k = \frac{-3}{2} \wedge n = \frac{1}{2}$

  $n+2+k = -1 \wedge n+2-k = -4$ con soluciones $k = \frac{3}{2} \wedge n = \frac{-9}{2}$

  $n+2+k = 4 \wedge n+2-k = 1$ con soluciones $k = \frac{3}{2} \wedge n = \frac{1}{2}$

  $n+2+k = -4 \wedge n+2-k = -1$ con soluciones $k = \frac{-3}{2} \wedge n = \frac{-9}{2}$

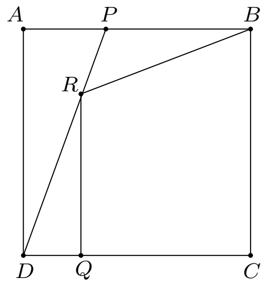
  $n+2+k = 2 \wedge n+2-k = 2$ con soluciones $k = 0 \wedge n = 0$

  $n+2+k = -2 \wedge n+2-k = -2$ con soluciones $k = 0 \wedge n = -4$

  De los cuales solo los dos últimos tienen soluciones enteras, con $n = 0$ y $n = -4$, que dan soluciones para x ($x = 0$ y $x = 2$).

  Por lo que la cantidad de valores de n enteros para los cuales la ecuación tiene soluciones enteras es 2.

10. (IIE, IIIN, 2015) Considere la siguiente figura en la cual el $\square ABCD$ es un cuadrado de lado 12. Si $AP = 4$, $DQ = 3$ y $m\angle RQC = 90°$ determine la longitud de $\overline{RB}$.

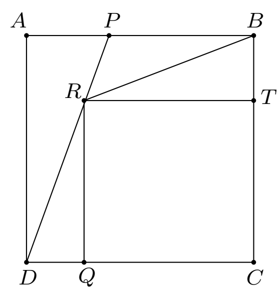


(a) $4\sqrt{3}$
(b) $3\sqrt{10}$
(c) 9
(d) $6\sqrt{3}$

Solución:

Respuesta correcta: Opción b)

Tome T en $\overline{BC}$ tal que $\overline{RT} \perp \overline{BC}$, tal como se muestra en la figura

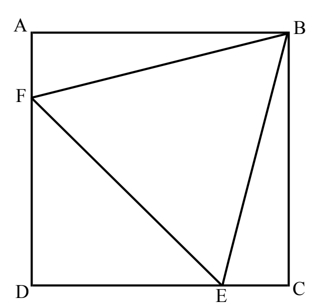


$\overline{AD} \parallel \overline{QR}$ entonces $\angle ADP \cong \angle DRQ$ así $\triangle PDA \sim \triangle DRQ$ entonces

$$\frac{12}{4} = \frac{DA}{PA} = \frac{RQ}{DQ} = \frac{RQ}{3}$$

y así $RQ = 9$, entonces $BT = 3$ y $RT = 9$, aplicando Pitágoras se tiene que $RB = 3\sqrt{10}$

11. (IIE, IIIN, 2015) En la figura adjunta $\square ABCD$ es un cuadrado y ΔBEF es un triángulo equilátero. Si el área del $\square ABCD$ es un metro cuadrado, determine el área del ΔBEF



Solución:

Si $EC = AF = x$, entonces $DF = DE = 1 - x$. Note que $0 < x < 1$.

El área del ΔBEF se obtiene restando al área del $\square ABCD$ las áreas de los triángulos ΔABF, ΔDFE y ΔCEB.

Luego,

$$\begin{aligned}
\text{área del } \Delta BEF &= 1 - \frac{x}{2} - \frac{\left((1-x)^2\right)}{2} - \frac{x}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(2 - x - x - 1 + 2x - x^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - x^2\right)
\end{aligned}$$

Si y denota la medida de cada uno de los lados del ΔBEF, de acuerdo con el teorema de Pitágoras (aplicado a los tres triángulos mencionados anteriormente) se tiene que $x^2 + 1 = y^2 = (1-x)^2 + (1-x)^2$. De esta manera:

$$\begin{aligned}
& x^2 + 1 = (1-x)^2 + (1-x)^2 \\
\Rightarrow\ & x^2 + 1 = 2(1-x)^2 \\
\Rightarrow\ & x^2 + 1 = 2\left(1 - 2x + x^2\right) \\
\Rightarrow\ & 0 = 2 - 4x + 2x^2 - x^2 - 1 \\
\Rightarrow\ & x^2 - 4x + 1 = 0 \\
\Rightarrow\ & x = \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}
\end{aligned}$$

De los valores anteriores, x no puede ser $displaystyle 2 + \sqrt{3}$ pues $2 + \sqrt{3} > 1$; así, $x = 2 - \sqrt{3}$.

$$\begin{aligned}
\text{área del } \Delta BEF &= \frac{1}{2}\left(1 - x^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \left(2 - \sqrt{3}\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-6 + 4\sqrt{3}\right) \\
&= -3 + 2\sqrt{3}
\end{aligned}$$

12. (IIE, IIIN, 2017) Considere el $\triangle ABC$, con $BC = 1$, $m\angle ABC = 60°$ y el radio del circuncírculo es $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Si D es otro punto en el circuncírculo del $\triangle ABC$, tal que $\overline{DC}$ pasa por el punto medio de $\overline{AB}$, determine DB.

Solución:

Sean O el centro del circuncírculo, E el punto medio de $\overline{AB}$ y F el punto medio de $\overline{BC}$; note que los triángulos $\triangle BFO$ y $\triangle CFO$ son congruentes por criterio L-L-L.

Así $m\angle BFO = 90°$; además $\triangle BFO$ y $\triangle CFO$ son especiales de $30° - 90° - 60°$, por lo que $m\angle OBA = 30° = m\angle OAB$.

Luego, $m\angle AOB = 120° = m\angle BOC$ y $m\angle COA = 360° - 120° - 120° = 120°$.

Por criterio L-A-L $\triangle AOB$, $\triangle BOC$ y $\triangle COA$ son congruentes, así, $AB = CA = BC = 1$, de donde el $\triangle ABC$ es equilátero de lado 1.

Así, $\overline{CD}$ pasa por O y $OE = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$, por lo que $DE = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$. Por Pitágoras $DB = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.