OLIMPIADAS COSTARRICENSES DE MATEMÁTICA
CAPACITACIÓN PARA II ELIMINATORIA 2019
III NIVEL. TEMA: Razonamiento Lógico
DÍA 2. Sesión de la tarde

Enunciados y soluciones de los problemas

Selección única

1. (IIE, IIIN, 2013) Si en una tómbola se depositan todos los números naturales de tres dígitos. La probabilidad de sacar un número al azar cuyos tres dígitos sean pares y diferentes corresponde a

   (a) $\frac{1}{20}$
   (b) $\frac{4}{75}$
   (c) $\frac{3}{50}$
   (d) $\frac{2}{25}$

   Solución:

   Respuesta correcta: Opción b)

   Las posibilidades para el primer dígito son: $42, 4, 6, 8$. Para el segundo dígito se tiene 4 posibilidades: $0, 2, 4, 6, 8$ menos la que se escogió para el primer dígito.

   Por último, para el tercer dígitose tiene tres posbilidades. En total hay 48 números de tres dígitos pares distintos entre los 900 números de tres dígitos.

   Entonces la probablidade de sacar un número al azar de la tómbola de este tipo es $\frac{4 \cdot 4 \cdot 3}{900} = \frac{48}{900} = \frac{4}{75}$

2. (IIE, IIIN, 2014) La cantidad de kilos de café con valor de 5600/kg que hay que mezclar con 77 kg de otro café de menor calidad, a 4200/kg, para que la mezcla tenga un valor de 4522/kg es

   (a) 23
   (b) 57
   (c) 65
   (d) 93

   Solución:

   Respuesta correcta: Opción a)

   Si x es la cantidad de kilos de café de 5600/kg que hay que agregar, entonces
   $\dfrac{5600 \cdot x + 77 \cdot 4200}{77 + x} = 4522 \Rightarrow x = 23$

3. (IIE, IIIN, 2013) En un avión que volvía de las Olimpiadas Centroamericanas de Matemática, iban cinco "matletas" que ocuparon los cinco primeros puestos en esa competencia. Al preguntarles los periodistas por sus resultados, hicieron las siguientes declaraciones:

   Allan: No fui el último.
   Kenia: Carlos fue tercero.
   Carlos: Allan obtuvo menos puntaje que Evelyn.
   Rodolfo: Evelyn fue segunda.
   Evelyn: Rodolfo no fue el primero

   Por modestia, los dos que obtuvieron mayor puntaje mintieron. Los otros tres dijeron la verdad. Entonces los "matletas" que mintieron se llaman:

   (a) Kenia y Rodolfo
   (b) Evelyn y Carlos
   (c) Allan y Rodolfo
   (d) Evelyn y Allan

   Solución:

   Respuesta correcta: Opción a)

   La declaración de Allan deber ser verdadera: si miente, sería al mismo tiempo último o primero o segundo, lo que es contradictorio. Pro lo tanto, Allan es tercero o cuarto.

   Si Rodolfo está diciendo la verdad, Evalyn está mintiendo y Rodolfo es primero y está mintiendo, lo que es uns contradicción. Por lo tanto Evelyn no es la segunda y Rodolfo es primero o segundo.

   Si Evelyn está mintiendo, Rodolfo es primero y Evelyn segunda. Pero Rodolfo está mintiendo cuando dice que Evelyn es segunda. Por lo tanto, Evelyn está diciendo la verdad, lo que la hace tercera, cuarta o quinta. Además, Rodolfo no es primero, sino segundo.

Sólo Kenia o Carlos pueden ser el primero. Si Kenia no es primera, dado que tampoco es segunda tiene que estra diciendo la verdad. Si Carlos es tercero, no puede ser al mismo tiempo primero, por lo tanto Kenia es primera y Carlos no es el tercero.

Por último para ver si no existe empate, ya que Carlos no es primero ni segundo, está diciendo la verdad al afirmar que Allan viene detrás de Evelyn. Por lo tanto, Evelyn es tercera, Allan cuarto y Carlos quinto.

Por lo tanto, el puntaje más alto lo obtuvo Kenia y el segudo Rodolfo.

4. (IIE, IIIN, 2015) Hay cinco cajas, A, B, C, D, E, y Henry tiene 1000 cartas, cada una con un único y diferente número del uno al mil, ambos inclusive. Echa las cartas, una por una, en las cajas de la siguiente forma: echa la 1 en la A, la 2 en la B, y así hasta la 5 en la E, se salta la A, y echa la 6 en la B, la 7 en la C, y así hasta la 10 en la A, se salta la B. Si continúa de la misma forma hasta acabar las 1000 cartas, la carta 763 va en la caja

   (a) B
   (b) C
   (c) D
   (d) E

   Solución:
   Respuesta correcta: Opción d)

   Note el siguiente patrón, donde una X representa que nos saltamos la caja, y donde tenemos las cajas ordenadas como ABCDE:

$$1, 2, 3, 4, 5$$
$$X, 6, 7, 8, 9$$
$$10, X, 11, 12, 13$$
$$14, 15, X, 16, 17$$
$$18, 19, 20, X, 21$$
$$22, 23, 24, 25, X$$

   Cada 25 cartas, volvemos a repetir este patrón. Por lo tanto, como $763 = 25(30) + 13$, su posición es la misma que aquella de la carta 13. O sea, va en la E.

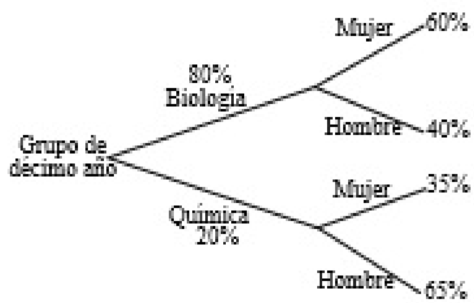
5. (IIE, IIIN, 2015) En cierto colegio los estudiantes de décimo año pueden optar por cursar como ciencia natural entre biología o química. En uno de los grupos de décimo, 80 % de los estudiantes estudia biología y el resto química; 40 % de los que estudian biología son hombres y, de los que estudian química, 35 % son mujeres. Si se selecciona al azar un estudiante de este grupo de décimo año, la probabilidad de que sea mujer es

   a) 0,39
   b) 0,45
   c) 0,55
   d) 0,61

   Solución:

   Respuesta correcta: Opción c)

   Lo descrito en el problema se puede modelar de la manera siguiente:



   De acuerdo con la representación anterior, la probabilidad de que el estudiante seleccionado sea mujer es $(0{,}8) \cdot (0{,}6) + (0{,}2) \cdot (0{,}35) = 0{,}55$.

6. (IIE, IIIN, 2016) Sara, Sofía, Nicole y Jesenia nacieron en los meses de enero, marzo, agosto y diciembre del mismo año aunque no necesariamente en ese orden. Al preguntarles por el mes en que nacieron Sara dice que en enero, Sofía indica que nació en marzo, Nicole responde que Jesenia no nació en agosto y Jesenia contesta que Sofía nació en diciembre. Si solo una de ellas miente, entonces con certeza se cumple que

   (a) Sofía nació en enero
   (b) Jesenia nació en diciembre
   (c) Nicole nació en agosto
   (d) Sara nació en marzo

- Opción correcta: (c)
- Solución:

  Según los datos del problema las únicas que pueden mentir son Sofía o Jesenia, pues si dicen la verdad, Sofía nacería en dos meses distintos.

- Si Sofía miente entonces los meses en que nacieron Sara, Sofía, Nicole y Jesenia son respectivamente enero, diciembre, agosto y marzo.
- Si Jesenia miente entonces los meses en que nacieron Sara, Sofía, Nicole y Jesenia son respectivamente enero, marzo, agosto y diciembre.

En cualquiera de los dos casos Nicole nació en agosto.

7. (IIE, IIIN, 2016) Una urna contiene 10 bolas iguales, excepto por las letras que tienen escritas. Dos de ellas tienen la letra O, dos la A, dos la L, dos la M y dos la C. Si se extraen de forma consecutiva seis bolas de la urna, entonces la probabilidad de que la primera bola contenga la letra O, la segunda la letra L, y así sucesivamente hasta formar la palabra OLCOMA, es

   (a) $\frac{1}{4725}$
   (b) $\frac{1}{15\,625}$
   (c) $\frac{1}{31\,250}$
   (d) $\frac{1}{1\,000\,000}$

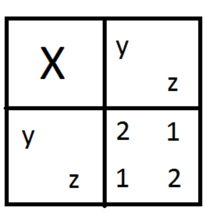
- Opción correcta: (a)
- Solución:

  En este caso la extracción se realiza sin reposición, por lo que cada vez que se saca una bola de la urna el total de bolas que quedan disminuye en una unidad. Debido a esto la probabilidad de extraer seis bolas y formar la palabra OLCOMA es: $\frac{2}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{4725}$

8. (IIE, IIIN, 2017) En cada casilla de una cuadrícula de 2×2 se desea escribir los números 1, -1 o 0 de manera que ninguna fila o columna sume cero. La cantidad máxima de maneras en que es posible escribir estos números es

   (a) 9
   (b) 12
   (c) 18
   (d) 36

- Opción correcta: c
- Solución:



Si el número en la primer casilla es x entonces la casilla de la derecha y la de abajo tienen dos posibilidades para no sumar 0, digamos y y z.

Si estas dos fueran la misma entonces la cuarta casilla tiene dos opciones para no sumar cero, pero si son diferentes solo le queda una opción.

Así por cada x hay 6 opciones y como x tiene 3 posibilidades en total hay 18 posibilidades.

9. (IIE, IIIN, 2017) Considere los números $p = n\left(n^2 - 1\right)$ con n entero y $1 \leq n \leq 2017$. La cantidad de números p que terminan en 0 es

   (a) 1209

   (b) 1210

   (c) 1211

   (d) 1212

- Opción correcta: b
- Solución:

  Como $p = n(n-1)(n+1)$, p es el producto de tres números consecutivos y el último dígito de un producto solo depende de los últimos dígitos de los factores, basta examinar los productos:

$n-1$	n	$n+1$	Termina
1	2	3	6
2	3	4	4
3	4	5	0
4	5	6	0
5	6	7	0
6	7	8	6
7	8	9	4
8	9	10	0
9	10	11	0
10	11	12	0

  Como hay una secuencia de $\{6, 4, 0, 0, 0\}$ y $2015 = 403 \cdot 5$, significa que de $n = 2$ a $n = 2017$ hay $403 \cdot 3 = 1209$ números p que terminan en cero; además, como el primer p es cero, hay 1210 en total.

10. (IIE, IIIN, 2017) En una casa donde cuidan gatos hay camas para gatos y el cuidador observó que:

   - En cada cama que hay en la casa han dormido seis gatos.
   - Cada gato usó exactamente tres camas distintas.
   - Por cada posible trío de camas hubo exactamente uno y solo un gato que usó las tres camas.

   Se puede afirmar que el total de gatos en la casa es

(a) 10

(b) 15

(c) 18

(d) 21

- Opción correcta: a
- Solución:

Si k denota la cantidad de camas, entonces como cada gato usó 3 camas distintas y por cada posible trío de camas hubo exactamente uno y solo un gato que usó las tres camas, por lo que la cantidad de gatos que hay en la casa es $\dfrac{k(k-1)(k-2)}{6}$.

Como en cada cama que hay en la casa han dormido 6 gatos si relacionaramos las camas con los gatos, cada gato estaría relacionado con tres camas y cada cama con seis gatos, entonces $6k = 3 \cdot \dfrac{k(k-1)(k-2)}{6}$.

Resolviendo la ecuación anterior se tiene que $k = 0$, $k = -2$ y $k = 5$.

Como k es un número entero positivo por ser una cantidad, entonces $k = 5$; así, la cantidad de gatos es $\dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6} = 10$.

11. (IIE, IIIN, 2018) Se lanza una moneda al aire en 10 oportunidades. La probabilidad de que caigan exactamente tres escudos es

(a) $\dfrac{15}{128}$

(b) $\dfrac{15}{64}$

(c) $\dfrac{1}{32}$

(d) $\dfrac{1}{10}$

- Opción correcta: (a)
- Solución:

Considere C por corona y E por escudo.

El resultado de los diez lanzamientos pueden expresarse por una sucesión de longitud 10 formada por las caras de la moneda C y E, entonces el número total de posibilidades es $2^{10} = 1024$.

Los casos favorables es cuando se lanza la moneda 10 veces y salen exactamente 3 veces escudos, entonces el total de casos favorables es $\dbinom{10}{3} = \dfrac{10!}{3! \cdot 7!} = 120$.

Por lo tanto, la probabilidad de que al lanzar una moneda al aire 120 veces salgan exactamente 3 escudos es $\dfrac{120}{1024} = \dfrac{15}{128}$.

12. (IIE, IIIN, 2018) Se construye una secuencia a_n de números como sigue:

    - Se empieza con $a_1 = 123$.
    - a_2 se forma escribiendo 123 entre todos los dígitos de a_1, por lo que $a_2 = \mathbf{1}\ 123\ \mathbf{2}\ 123\ \mathbf{3}$.
    - Para a_3 se inserta como antes 123 entre todos los dígitos de a_2; así:

    $$a_3 = \mathbf{1}\ 123\ \mathbf{1}\ 123\ \mathbf{2}\ 123\ \mathbf{3}\ 123\ \mathbf{2}\ 123\ \mathbf{1}\ 123\ \mathbf{2}\ 123\ \mathbf{3}\ 123\ \mathbf{3}$$

    - Se continúa de la misma forma en cada paso siguiente para obtener cada término a_n que se desee.

    La cantidad de dígitos que tendrá a_{2018} corresponde a

    (a) $2^{2018} + 1$
    (b) $2^{2019} + 1$
    (c) $2^{4035} + 1$
    (d) $2^{4037} + 1$

- Opción correcta: (c)
- Solución:

  Sea b_n el número de dígitos que tiene el número a_n. Se observa que
  $b_1 = 3 = 2^1 + 1$
  $b_2 = 3 \cdot 2 + 3 = 9 = 2^3 + 1$
  $b_3 = 3 \cdot 8 + 9 = 33 = 2^5 + 1$
  $b_4 = 3 \cdot 32 + 33 = 129 = 2^7 + 1$
  $b_n = 3 \cdot (b_{n-1} - 1) + b_{n-1} = 2^{2n-1} + 1$
  Por lo tanto, $b_{2018} = 2^{4035} + 1$ es la cantidad de dígitos que tendrá a_{2018}.

13. (IIE, IIIN, 2018) Rolando tiene en su alcancía un total de 2018 monedas de todas las denominaciones (500, 100, 50, 25, 10 y 5 colones, respectivamente). La cantidad de monedas de una denominación menor es mayor que la cantidad de monedas de una denominación mayor, en todos los casos. La cantidad máxima de dinero, en colones, que puede tener Rolando corresponde a

    (a) 230 350

    (b) 230 300

    (c) 203 050

    (d) 230 350

- Opción correcta: (b)
- Solución:

  Sean a, b, c, d, e y f, respectivamente, las cantidades de monedas de 500, 100, 50, 25, 10 y 5. Se necesita que $a < b < c < d < e < f$ y que $a + b + c + d + e + f = 2018$.

Para obtener la mayor cantidad de dinero posible, debería haber la mayor cantidad posible de monedas de 500. La mejor forma de distribuir es que cada denominación menor tenga apenas una moneda más que las de la denominación inmediatamente mayor; es decir, lo ideal sería que

$$b = a + 1,\ c = a + 2,\ d = a + 3,\ e = a + 4,\ f = a + 5$$

Pero $a+(a+1)+(a+2)+(a+3)+(a+4)+(a+5) = 6a+15 = 2018 \Rightarrow a = 333{,}8\overline{3}$; es decir, $a \notin \mathbb{N}$

Tomando $a = 334$ se sobrepasa de 2018 monedas y tomando $a = 333$ se obtiene 2013 monedas, es decir, quedan 5 monedas por distribuir.

La siguiente denominación mayor (100) debería tener entonces una moneda más, lo que obliga a sumar una a cada una de las denominaciones menores (50, 25, 10 y 5).

Así, $a = 333, b = 335, c = 336, d = 337, e = 338$ y $f = 339$.

La cantidad de dinero total es

$$333 \cdot 500 + 335 \cdot 100 + 336 \cdot 50 + 337 \cdot 25 + 338 \cdot 10 + 339 \cdot 5 = 230\,300$$

Desarrollo

1. (IIE, IIIN, 2015) Rolando dibuja una serie de 2015 figuras con el siguiente orden:

Si selecciona al azar una figura que está en una posición múltiplo de 5, determine la probabilidad de que esta figura sea un pentágono.

Solución:

Observe que hay un:
Triángulo en las posiciones $1, 7, 13, ..., 1 + 6k$
Cuadrado en las posiciones $2, 8, 14, ..., 2 + 6k$ y $6, 12, 18, ..., 0 + 6k$
Pentágono en las posiciones $3, 9, 15, ..., 3 + 6k$ y $5, 11, 17, ..., 5 + 6k$
Hexágono en las posiciones $4, 10, 16, ..., 4 + 6k$

De esto se puede deducir también que, si se toma un número de la secuencia y se divide por 6, la figura que está en esa posición quedarí determinada por el residuo de esta división de la siguiente manera:

Residuo	*Figura*
0	*Cuadrado*
1	*Triangulo*
2	*Cuadrado*
3	*Pentagono*
4	*Hexagono*
5	*Pentagono*

Tomando esto en cuenta se puede observar un periodo en las figuras obtenidas, debido al periodo de los residuos:

Numero :	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
Residuo :	5	4	3	2	1	0	5	4	3	2	1	0
Figura :	*P*	*H*	*P*	*C*	*T*	*C*	*P*	*H*	*P*	*C*	*T*	*C*

Se observa que por cada grupo de 6 múltiplos consecutivos de 5 hay 2 pentágonos

Finalmente, en 2015 números hay 403 múltiplos de 5, que es la cantidad total de casos y $403 = 67 \cdot 6 + 1$, por lo que se tienen en total $67 \cdot 2 + 1 = 135$ pentágonos de esos 403 casos. Por lo tanto la probabilidad buscada es

$$\frac{135}{403}$$

2. (IIE, IIIN, 2016) Un automóvil tiene un precio A en dólares, donde A es un entero de cuatro dígitos, escrito con números como los siguientes

Mientras el vendedor se distrae, el comprador gira el rótulo del precio 180° a favor de las manecillas del reloj, y el precio resultante es 1626 dólares menos que el precio original. Determine el valor original del carro.

- Solución:

Al girarse no todos los números representan un número, veamos el 0, 1, 2, 5, 8 representan el mismo número, el 6 y el 9 se invierten y el 3, 4, 7 no se pueden invertir, es decir el rótulo del precio solo puede contener los números 0, 1, 2, 5, 6, 8, 9.
Sea $ABCD$ el precio original y $XYZW$ el precio luego de girar el rótulo, así
$ABCD - XYWZ = 1126$, entonces y $A - X = 1$, y así,

$A = 9$ y $X = 8 \Rightarrow W = 6$ y $D = 8 \Rightarrow D - W = 2(\uparrow\downarrow)$
$A = 8$ y $X = 6 \Rightarrow W = 8$ y $D = 9 \Rightarrow D - W = 1(\uparrow\downarrow)$

$A = 6$ y $X = 5 \Rightarrow W = 9$ y $D = 5 \Rightarrow D - W = 6(\surd)$
$A = 5$ no es posible
$A = 2$ y $X = 1 \Rightarrow W = 2$ y $D = 1 \Rightarrow D - W = 9(\uparrow\downarrow)$
$A = 2$ y $X = 0 \Rightarrow W = 2$ y $D = 0 \Rightarrow D - W = 8(\uparrow\downarrow)$
$A = 1$ y $X = 0 \Rightarrow W = 1$ y $D = 0 \Rightarrow D - W = 9(\uparrow\downarrow)$

Así tenemos que $C - 1 - z = 2$ y entonces $C - Z = 3$, así
$C = 9$ y $Z = 6 \Rightarrow Y = 6$ y $B = 9 \Rightarrow 6995 - 5669 = 1326(\uparrow\downarrow)$
$C = 8$ y $Z = 5 \Rightarrow Y = 8$ y $B = 5 \Rightarrow 6585 - 5859 = 726(\uparrow\downarrow)$
$C = 6$ no es posible
$C = 5$ y $Z = 2 \Rightarrow Y = 5$ y $B = 2 \Rightarrow 6255 - 5529 = 726(\uparrow\downarrow)$
$C = 2$ y $Z = 9 \Rightarrow Y = 2$ y $B = 6 \Rightarrow 6625 - 5299 = 1326(\uparrow\downarrow)$
$C = 1$ y $Z = 8 \Rightarrow Y = 1$ y $B = 8 \Rightarrow 6815 - 5189 = 1626(\surd)$
$C = 0$ no es posible
Por lo tanto, el precio original es 6815 dólares

3. (IIE, IIIN, 2017) En un torneo de fútbol durante la copa Europa–América, hubo nueve equipos más de Europa que de América. Cada pareja de equipos jugó exactamente una vez y, en total, los equipos europeos ganaron nueve veces tantos partidos como los ganados por los equipos americanos. Si no hubiera empates y el número de partidos ganados por los equipos americanos a los equipos europeos es seis, determine la cantidad de equipos americanos que participaron en dicha copa intercontinental.

Solución:
Sea n el número de equipos americanos y $n + 9$ el número de equipos europeos. Los equipos americanos jugaron $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ partidos entre ellos y como no hubo empates ganaron en total $\frac{n(n-1)}{2} + 6$ partidos.
Similarmente, los equipos europeos jugaron $\binom{n+9}{2} = \frac{(n+8)(n+9)}{2}$ partidos entre ellos y ganaron $n(n+9)-6$ partidos contra equipos americanos, por lo que en total ganaron $\frac{(n+8)(n+9)}{2} + n(n+9) - 6$ partidos.

Luego:
$$\begin{aligned} 9\left(\frac{n(n-1)}{2} + 6\right) &= \frac{(n+8)(n+9)}{2} + n(n+9) - 6 \\ \Rightarrow\ 3n^2 - 22n + 24 &= 0 \\ \Rightarrow\ (3n-4)(n-6) &= 0 \\ \Rightarrow\ n = \frac{4}{3} \text{ o } n = 6 \end{aligned}$$
Como n es entero, se concluye que la cantidad de equipos americanos es 6.