OLIMPIADAS COSTARRICENSES DE MATEMÁTICA
CAPACITACIÓN PARA II ELIMINATORIA 2019
III NIVEL. TEMA: Teoría de Números
DÍA 2. Sesión de la mañana

Enunciados y soluciones de los problemas

Selección única

1. (IIE, IIIN, 2013) La cantidad de primos p tales que $9p+1$ es un cubo perfecto corresponde a

   (a) 0
   (b) 1
   (c) 2
   (d) 3

   Solución:

   Respuesta correcta: Opción b)

   Dado que $9p+1$ debe ser un cubo perfecto se tiene $9p+1=k^3$ con k entero. Luego $9p+1=k^3 \Rightarrow 9p=k^3-1=(k-1)(k^2+k+1)$ de donde se deduce que $k-1$ divide a $9p$ y como p es primo, $k-1 \in \{1,3,9,p,3p,9p\}$. Se analizan todos los casos:

   $k-1=1 \Rightarrow k=2 \Rightarrow p=\dfrac{7}{9}$

   $k-1=3 \Rightarrow k=4 \Rightarrow p=7$ (sí cumple)

   $k-1=9 \Rightarrow k=10 \Rightarrow p=111$ (no es primo)

   $k-1=p \Rightarrow (p+1)^2+(p+1)+1=9 \Rightarrow p^2+3p-6=0$ (no tiene soluciones enteras)

   $k-1=3p \Rightarrow (3p+1)^2+(3p+1)+1=3 \Rightarrow 9p^2+9p=0 \Rightarrow p=0$ *o* $p=-1$

   $k-1=9p \Rightarrow (9p+1)^2+(9p+1)+1=13 \Rightarrow 81p^2+27p+2=0 \Rightarrow p=\dfrac{-1}{9}$ *o* $p=\dfrac{-2}{9}$

   Vemos entonces que solo $p=7$ cumple la condición.

2. (IIE, IIIN, 2014) La cantidad de divisores del número 2014^2014 es

   (a) 2015
   (b) 2015^2
   (c) 2015^3
   (d) 2015^4

   Solución:

   Respuesta correcta: Opción c)

   $2014^2014 = (2 \cdot 19 \cdot 53)^2014 = 2^2014 \cdot 19^2014 \cdot 53^2014$ por lo que el número de divisores es $(2014+1) \cdot (2014+1) \cdot (2014+1) = 2015^3$

3. (IIE, IIIN, 2015) Sean a y b dos enteros positivos coprimos, es decir, el mx́imo común divisor entre ellos es 1. Si a tiene exactamente 4 divisores positivos, y b tiene exactamente 4 divisores positivos, entonces el máximo número de divisores positivos que tiene ab es

   (a) 1
   (b) 4
   (c) 8
   (d) 16

   Solución:

   Respuesta correcta: Opción d)

   Sabemos que a y 1 son dos divisores positivos de a (y no son iguales pues $a \neq 1$ dado que solo tendría un divisor positivo en ese caso). Además a no puede tener más de dos divisores primos distintos, pues entonces habría más de 4 divisores.

   Analizando su factorización prima, a solo podría tener la forma $a = p^3$, o $a = pq$, con p, q primos distintos, pues si solo aparece un primo, éste deber estar elevado a la 3 (para tener exactamente 4 divisores: $1, p, p^2, p^3$); y si aparecen dos primos, ninguno puede estar elevado a una potencia mayor que 1 pues si no, por ejemplo, p^2q o pq^2 son divisores positivos adicionales a $1, p, q, pq$.

   Un análisis similar nos dice que $b = r^3$ o $b = rs$, donde r, s son primos distintos a p, q pues a y b son coprimos.

   Entonces ab es igual a p^3r^3 o pqr^3 o p^3rs o $pqrs$.

   En el primer caso los divisores son de la forma p^ir^j, donde $0 \leq i, j \leq 3$, por lo que hay $4 \cdot 4 = 16$ opciones. En el segundo caso (que es análogo al tercero), los divisores tienen la forma $p^iq^jr^k$, donde $0 \leq i, j \leq, 0 \leq k \leq 3$, por lo que hay $2 \cdot 2 \cdot 4 = 16$ opciones. Finalmente, en el último caso, los divisores son de la forma $p^iq^jr^ks^t$, donde $0 \leq i, j, k, t \leq 1$, por lo que hay $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ opciones. En cada caso, la respuesta es 16.

4. (IIE, IIIN, 2015) Sean a y b dos enteros positivos. Si sabemos que son coprimos (el máximo común divisor entre ellos es 1), entonces el máximo valor que puede tener el máximo común divisor de $(a+b)$ y $(a-b)$ es

   (a) 1
   (b) 2
   (c) 4
   (d) 8

   Solución:

   Respuesta correcta: Opción b)

   Sea $d := MCD(a+b, a-b)$. Note que entonces $d|(a+b), d|(a-b)$. Por lo tanto, $d|((a+b)+(a-b)$, o sea, $d|2a$. De manera análoga, $d|2b$. Sea p un divisor primo de d. Entonces, $p|d$, por lo cual $p|2a$ y $p|2b$. Como p es primo, divide a 2 o divide a a. Similarmente, de la segunda expresión tenemos que p divide a 2 o divide a b.

   Si p no divide a 2, entonces p divide tanto a a como a b, pero eso quiere decir que es un divisor común a a y b. Sin embargo, eso indica que tiene que dividir al máximo común divisor, o sea, a 1, y ningún primo divide a 1. Por lo tanto, p debe dividir a 2.

   Este análisis indica que el único divisor primo que puede tener d es 2. Sin embargo, 4 no puede dividir a d, pues en ese caso $4|2a$ y $4|2b$, por lo que $2|a$ y $2|b$, y de nuevo contradiría el hecho de que a y b son coprimos.

   En conclusión, el máximo valor que puede tener d es 2 (que ocurre si tanto a como b son impares).

5. (IIE, IIIN, 2015) Si un número entero positivo n tiene exactamente 16 divisores positivos, entonces el producto de esos 16 divisores es

   (a) n^{16}
   (b) n^8
   (c) n^4
   (d) n^2

   Solución:

   Respuesta correcta: Opción b)

   Sean $1 = a_1 < a_2 < \cdots, a_{15} < a_{16} = n$ los 16 divisores a estudiar. Note que si a_i es un divisor de n, entonces también n/a_i lo es. O sea, cada divisor tiene una pareja y dicha pareja es única. Note además que $a_1 a_{16} = n$. De igual manera, $a_i a_{17-i} = n$. Entonces

$$\prod_{i=1}^{16} a_i = \prod_{i=1}^{8} n = n^8.$$

6. (IIE, IIIN, 2016) La cantidad de divisores positivos que tiene el número 100 000 que no son múltiplos de 1000 es

   (a) 9
   (b) 20
   (c) 27
   (d) 36

- Opción correcta: (c)
- Solución:

  Dado que $100\,000 = 2^5 \cdot 5^5$ se tiene que 100 000 tiene $6 \times 6 = 36$ divisores positivos. Por otra parte los divisores de 100 000 que son múltiplos de 1000 son de la forma $2^\alpha \cdot 5^\beta$ donde $3 \leq \alpha \leq 5$ y $3 \leq \beta \leq 5$. En total hay 9 divisores que cumplen esta condición. Por lo tanto hay $36 - 9 = 27$ divisores de 100 000 que no son múltiplos de 1000.

7. (IIE, IIIN, 2018) Si a, b y c son números enteros positivos, tales que $ab - 1$ es par, entonces con certeza $7^{b+c}a + (b-3)^2\, c$ es

   (a) par
   (b) impar
   (c) par únicamente si c es impar
   (d) impar únicamente si c es par

- Opción correcta: (b)
- Solución:

  Como $(ab-1)$ es par entonces ab es impar y esto significa que a y b son impares, como 7 es impar la potencia 7^{b+c} es impar, finalmente $7^{b+c}a$ es impar.

  Por otro lado, como b es impar entonces $b-3$ es par y la potencia $(b-3)^2$ es par, luego $(b-3)^2c$ es par (independiente de c).

  Por tanto la suma de un número impar y un par dar como resultado un número impar.

8. (IIE, IIIN, 2018) Sea N el menor entero positivo con exactamente 11 divisores primos positivos. Al dividir N entre 11 el residuo corresponde a

   (a) 0
   (b) 1
   (c) 3
   (d) 5

- Opción correcta: (a)
- Solución:

  N debe ser el producto de los primeros 11 primos.

  Así. $N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \mathbf{11} \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31$, que es divisible por 11, por lo que el residuo de N dividido entre 11 es 0.

Desarrollo

1. (IIE, IIIN, 2015) Determine todos los cuadrados perfectos de cuatro cifras de la forma $NNMM$

   Solución:

   El número $NNMM$ se puede factorizar como
   $$\begin{aligned} NNMM &= 10^3N + 10^2N + 10M + M \\ &= 1100N + 11M \\ &= 11 \cdot (100N + M) \\ &= 11 \cdot (N0M) \end{aligned}$$

   Luego, el número $N0M$ debe ser divisible por 11 y, de acuerdo con la regla de divisibilidad por 11, como N y M son dígitos su suma no supera la cantidad 18 y esta suma menos cero (dígito en posición par) debe ser múltiplo de 11, por lo que se cumple $N + M = 11$.

   Las únicas posibilidades para que dicha suma se de son las siguientes:
   $$(N, M) \in \{(2, 9), (3, 8), (4, 7), (5, 6), (6, 5), (7, 4), (8, 3), (9, 2)\}$$

   Por los que los candidatos serían:
   $209 = 11 \cdot 19$, $308 = 11 \cdot 28$, $407 = 11 \cdot 37$, $506 = 11 \cdot 46$, $605 = 11 \cdot 55$, $704 = 11 \cdot 64 = 11 \cdot 8^2$, $803 = 11 \cdot 73$ y $902 = 11 \cdot 82$.

   Así, con $N = 7$ y $M = 4$ se obtiene el número $7744 = 11^2 \cdot 8^2$.

2. (IIE, IIIN, 2016) Determine la cantidad de divisores no negativos y cuadrados perfectos que tiene el número 1952^{2016}.

   Solución

   $1952 = 2^5 \cdot 61$.

   Un número cuadrado perfecto que divida a 1952^{2016} es de la forma $2^a \cdot 61^b$ donde a y b son enteros pares no negativos que cumplen que $0 \leq a \leq 5 \cdot 2016$ y $0 \leq b \leq 2016$.

   Dado que entre 0 y $5 \cdot 2016$ hay $\dfrac{5 \cdot 2016}{2} + 1 = 5041$ números pares, se tiene que a puede tomar 5041 valores distintos. Por otra parte b puede tomar $\dfrac{2016}{2} + 1 = 1009$ valores distintos. Por lo tanto hay en total $5041 \cdot 1009 = 5\,086\,369$ divisores de 1952^{2016} que son cuadrados perfectos.

3. (IIE, IIIN, 2018) Determine el número natural N más grande, en el que todos sus dígitos son distintos, tal que N es múltiplo de 8, 11 y 15 de manera simultánea.

Solución

Nótese que el número no podría tener más de diez dígitos, y en dicho caso, se usarían todos los dígitos, y al ser la suma de los enteros entre 0 y 9 igual a 45, divisible por 3. Al ser el número divisible entre 5 (al serlo por 15), entonces el último dígito es 0 o 5. Como se trata de un número par (al ser divisible por 8), se tiene que el último dígito es 0. Además, entre más cerca de 9876543210 se encuentre el número, mejor. Sin embargo, dicho número no es divisible entre 8.

Asumamos que solo dos dígitos cambian de lugar, entonces el número tendría que ser 9876543120. Sin embargo, este número no es divisible entre 11, puesto que $9-8+7-6+5-4+3-1+2-0=7$ que no es divisible entre 11. De ser los últimos tres dígitos los que se cambian, entonces el número tendrá que ser 9876541320 para que sea múltiplo de 8 y el 3 cambie de lugar. Pero nuevamente, $9-8+7-6+5-4+1-3+2-0=3$, que no es divisible entre 11.

Consideremos por lo tanto que el número que estamos buscando es de la forma $98765abcd0$, donde $\{a,b,c,d\}=\{1,2,3,4\}$. Nótese que d es par, por lo que $d=2$ o $d=4$. Si $d=2$, entonces tendríamos que $9-8+7-6+5-a+b-c+2=9+b-(a+c)$ es divisible entre 11. Sin embargo, dado que $\{a,b,c\}=\{1,3,4\}$, entonces $9+b-(a+c)$ tomaría los valores de 9, 7 o 3, ninguno de los cuales es divisible entre 11. Si $d=4$, entonces c es par, y el único par posible es 2, por lo que tenemos el número $98765ab240$, y por lo tanto $9-8+7-6+5-a+b-2+4=9+b-a$. Dado que $\{a,b\}=\{1,3\}$, si $b=3$ y $a=1$ tendríamos que $9+b-a=11$, y por lo tanto, 9876513240 es divisible entre 11. Además, como termina en 240, es divisible entre 8 y, finalmente, como termina en 0 y la suma de sus dígitos es divisible entre 3, entonces también es divisible entre 15.