XXIV OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA

MEP – ITCR – UCR – UNA – UNED - MICIT

SOLUCIÓN

PRIMERA ELIMINATORIA NACIONAL

NIVEL A

2012

1. El resultado de la operación $\left[\left(\frac{7}{12}+\frac{3}{16}\right)-\left(\frac{9}{32}-\frac{7}{40}\right)\right]\div\left(1-\frac{13}{16}\right)$ es

a) $\frac{319}{30}$

b) $\frac{319}{90}$

c) $\frac{421}{90}$

d) $\frac{421}{30}$

Solución **b)** $\frac{319}{90}$

$$\left[\left(\frac{7}{12}+\frac{3}{16}\right)-\left(\frac{9}{32}-\frac{7}{40}\right)\right]\div\left(1-\frac{13}{16}\right) = \left[\frac{28+9}{48}-\frac{45-28}{160}\right]\div\frac{3}{16} = \left(\frac{37}{48}-\frac{17}{160}\right)\div\frac{3}{16}$$

$$=\left(\frac{370-51}{480}\right)\div\frac{3}{16} = \frac{319}{480}\cdot\frac{16}{3} = \frac{319}{30}\cdot\frac{1}{3} = \frac{319}{90}$$

2. Si $a=2$ y $b=3$, la expresión $\dfrac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}{\frac{b}{a}+\frac{1}{ab}}-1$ es equivalente a

a) $\frac{23}{10}$

b) $\frac{1}{2}$

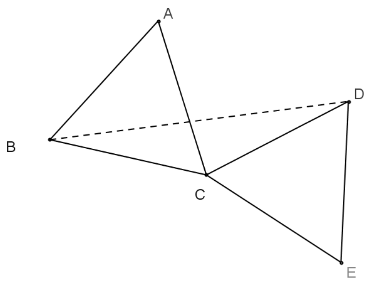
c) $\frac{3}{10}$

d) $-\frac{3}{2}$

Solución **c)** $\frac{3}{10}$

$$\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}{\frac{b}{a}+\frac{1}{ab}}-1=\frac{\frac{2}{3}+\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}+\frac{1}{6}}-1=\frac{\frac{13}{6}}{\frac{10}{6}}-1=\frac{13}{10}-1=\frac{3}{10}$$

3. En la figura, ΔABC y ΔCDE son equiláteros con AC = CD. Si el ángulo $\angle ACD$ mide 80°, entonces la medida del ángulo $\angle ABD$ es

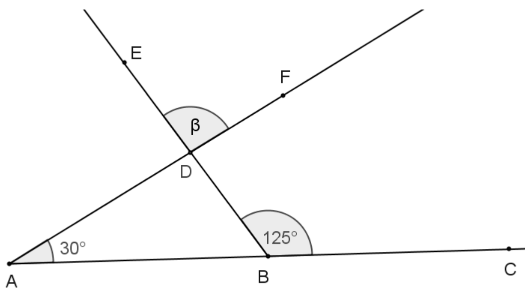


a) 30°
b) 35°
c) 40°
d) 45°

Solución: c) 40°

El $\Delta\ BCD$ es isósceles y $m\angle\ BCD = 60^\circ + 80^\circ = 140^\circ$. Por el teorema de la suma de los ángulos internos del triángulo $m\angle\ DBC = \dfrac{180^\circ - 140^\circ}{2} = 20^\circ$ y como $m\angle ABC = 60^\circ$, entonces $m\angle ABD = 60^\circ - 20^\circ = 40^\circ$.

4. En la siguiente figura, la medida del ángulo β corresponde a



A – B – C
B – D – E
A – D – F

a) 75°
b) 85°
c) 95°
d) 125°

Solución **c)** 95°

La medida del ángulo adyacente al ángulo de 125° es 55°. Por el teorema del ángulo externo de un triángulo, la medida del ángulo adyacente al ángulo β es $30^\circ + 55^\circ = 85^\circ$. Así, la medida del ángulo β es $180^\circ - 85^\circ = 95^\circ$.

5. Una caja tiene 18 bolas, 8 son rojas y las otras verdes. Si se saca una bola al azar, la probabilidad de que esa bola sea verde es

a) $\frac{4}{9}$

b) $\frac{5}{9}$

c) $\frac{9}{4}$

d) $\frac{9}{5}$

Solución b) $\frac{5}{9}$

Como son 18 bolas y hay 8rojas, entonces hay 10 bolasverdes. Así, la posibilidad de sacar un bola verde es $\frac{10}{18}$; es decir, $\frac{5}{9}$.

6. Una persona corrió 5 km, 2 dam, 6 hm en una hora. Si mantiene la misma rapidez, la cantidad de metros que corre en 5 horas es

a) 5260
b) 5620
c) 26300
d) 28100

Solución d) 28100
La cantidad de metros que recorre en una hora es 5000 + 20 + 600 = 5620.
Así, la cantidad de metros que recorre en cinco horas es 5·5620 = 28100.

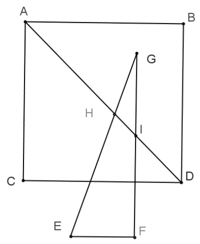
7. Los asientos de un carrusel están numerados con 1, 2, 3, y así sucesivamente de forma consecutiva y circular. Un niño está sentado en el número 11 y otro está sentado en el número 4, que está diametralmente opuesto. Entonces, la cantidad de asientos que tiene el carrusel es

a) 13
b) 14
c) 16
d) 17

Solución b) 14

Como el 11 está opuesto al 4, el 12 lo está con el 3, el 13 lo está con el 2 y el 14 lo está con el 1. Por lo tanto, hay 14 asientos en el carrusel.

8. En la figura el $\square ABDC$ es un cuadrado, además $\overline{GF} \parallel \overline{BD}$, $\overline{EF} \parallel \overline{BA}$ y $m\angle GEF = 60^\circ$. La medida del $\angle GHA$ es



a) 90°
b) 75°
c) 65°
d) 35°

Solución b) 75°

Como se tiene que $\overline{GF} \parallel \overline{BD}$ entonces $m\angle GFE = 90^\circ$, además como $m\angle GEF = 60^\circ$ entonces $m\angle EGF = 30^\circ$. Por otro lado, como $\overline{AD}$ es diagonal del cuadrado, entonces $m\angle ADC = 45^\circ$, esto hace que $m\angle FID = 45^\circ$, lo que implica que $m\angle GIH = 45^\circ$ por ser opuestos por el vértice. Así con $m\angle EGF = 30^\circ$ y $m\angle GIH = 45^\circ$, por el teorema de medidas de ángulos externos se tiene que $m\angle GHA = 75^\circ$.

9. Analice las siguientes proposiciones:

I. Si un número natural es un cuadrado perfecto entonces tiene exactamente 3 divisores.
II. Si un número natural tiene exactamente tres divisores positivos entonces es un cuadrado perfecto.

De ellas son verdaderas:
a) Solamente I
b) Solamente II
c) I y II
d) Ninguna

Solución b) Solamente II

I es falsa pues por ejemplo 36 es un cuadrado perfecto y tiene más de tres divisores.

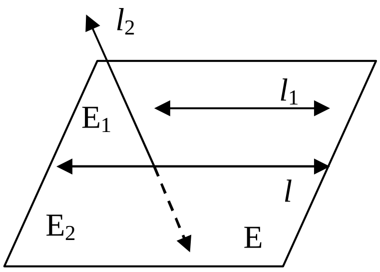
II es verdadero pues si un número tiene únicamente tres divisores, estos deben ser 1, el mismo número y otro factor que debe ser su raíz cuadrada, de lo contrario tendría un cuarto divisor.

10. Considere los semiplanos E_1 y E_2 en los que la recta l separa al plano E. Si la recta l_1 es una recta paralela a l que está contenida en E_1 y l_2 es una recta que interseca a l pero no a l_1, entonces se puede asegurar con certeza que

a) l_2 es paralela a l_1
b) l_2 es perpendicular a l
c) l_2 está contenida en E_2
d) l_2 no está contenida en E

Solución d. l_2 no está contenida en E

Si l_2 estuviera contenida en el plano E, como interseca a una de las rectas paralelas (l) debería intersecar a la otra (l_1) pero como se dice que no la interseca entonces deben ser rectas alabeadas.



11. Considere un triángulo isósceles, tal que dos de sus ángulos internos están en relación 1:4, entonces se puede asegurar que dicho triángulo podría ser

a) solamente acutángulo
b) solamente rectángulo
c) solamente obtusángulo
d) obtusángulo o acutángulo

Solución d) obtusángulo o acutángulo

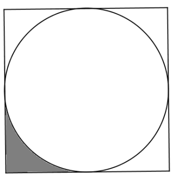
Como se tiene que el triángulo es isósceles, tiene dos ángulos de igual medida. Además se debe considerar que dos de sus ángulos internos están en relación 1:4, o sea puede ser x y otro $4x$.
Entonces tenemos dos opciones, que las medidas de los ángulos del triángulo sean $4x, 4x$ y x y como la suma de las medidas de los ángulos internos es 180°, entonces las medida de los ángulos serían 80°, 80° y 20°.
El otro caso es que las medidas de los ángulos sean x, x y $4x$, y por un razonamiento análogo al anterior, estas medidas serian 30°, 30° y 120°. Por lo tanto el triángulo podría ser obtusángulo o acutángulo.

12. Si el sucesor del producto de dos números primos es un número primo entonces se puede asegurar con certeza que la suma de esos dos números primos es un número

a) par
b) primo
c) impar
d) compuesto

Solución c) impar
De los dos primeros números primos uno de ellos debe ser 2, de lo contrario ambos serían impares, su producto sería impar y el sucesor del producto sería par y por lo tanto compuesto (pues no puede ser 2). Entonces la suma de 2 más un número impar es impar.

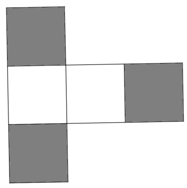
13. En la figura se muestra un círculo inscrito en un cuadrado cuyo perímetro es 32 cm. El área, en centímetros cuadrados, de la región sombreada con gris corresponde a



a) 12π
b) $16 - 4\pi$
c) $64 - 4\pi$
d) $4\pi - 8$

Solución **b)** 16 – 4π El área sombreada corresponde a la cuarta parte de la diferencia de las áreas de un cuadrado y el círculo que se encuentra inscrito en éste. Así, el lado del cuadrado se obtiene de la siguiente manera: $l = \frac{P}{4} = \frac{32}{4} = 8$ cm. El área del cuadrado es $A_{\square} = 8^2 = 64 \text{ cm}^2$ Mientras que el área del círculo es $A_{\circ} = \pi \cdot 4^2 = 16\pi \text{ cm}^2$ Ahora se calcula la diferencia $A_{sombreada} = \frac{64-16\pi}{4} = (16-4\pi) \text{ cm}^2$

14. En la figura adjunta se muestra un *pentaminó*, que es una figura compuesta por 5 cuadrados congruentes en donde cada uno tiene al menos un lado en común con otro cuadrado. Si el perímetro de la figura es de 60cm, entonces el área de la región sombreada con gris, en centímetros cuadrados, corresponde a



a) 25
b) 27
c) 36
d) 75

Solución d) 75 Note que el perímetro del pentaminó está compuesto por 12 lados congruentes por lo que cada uno mide $60 \div 12 = 5\,\text{cm}$. Entonces el área de cada cuadrado sombreado de gris es, $A = 5^2\,\text{cm}^2 = 25\,\text{cm}^2$. Por lo tanto el área total sombreada de gris corresponde a $3 \cdot 25\,\text{cm}^2 = 75\,\text{cm}^2$.

15. La cantidad de triángulos isósceles distintos de perímetro 25 cm y lados de longitudes enteras que pueden formarse es

a) 5
b) 6
c) 7
d) 12

Solución	b) 6

Por el teorema de la desigualdad triangular los dos lados de igual medida deben ser mayores que 6 y el otro lado menor o igual a 12. Además, los dos lados de igual medida deben ser menores que 13 para que el perímetro sea 25. Así, hay un total de 6 posibilidades para los lados de igual medida.

16. Si las medidas de los ángulos externos de un triángulo corresponden a α, β y θ y se cumple que $\theta = \frac{\alpha}{10} + \frac{\beta}{10} - 3$, entonces se puede afirmar con certeza que el triángulo es

a) acutángulo
b) rectángulo
c) obtusángulo
d) equiángulo

Solución	c) obtusángulo

Se tiene que la suma de las medidas de los ángulos externos de un triángulo es 360°. Esto es que $\alpha + \beta + \theta = 360$, como $\theta = \frac{\alpha}{10} + \frac{\beta}{10} - 3$, entonces podemos decir que $\alpha + \beta + \frac{\alpha}{10} + \frac{\beta}{10} - 3 = 360 \Leftrightarrow \frac{11}{10}(\alpha + \beta) = 363 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 330$.

De lo anterior se concluye que $\theta = 30^\circ$, por lo que un ángulo interno mide 150° y el triángulo debe ser obtusángulo.

17. Si 12 trabajadores construyen un muro en 8 días, con una jornada de 8 horas diarias, entonces la cantidad de trabajadores que se ocupan para construir un muro igual al anterior en 4 días con jornadas de 6 horas diarias corresponde a

a) 24
b) 32
c) 36
d) 40

Solución	b) 32

La cantidad de horas trabajadas en construir el muro en primera instancia por los 12 trabajadores es $12 \cdot 8 \cdot 8 = 768$. Por lo que se debe de invertir el mismo número de horas para construir el muro con la segunda condición, entonces si designamos con x la cantidad de trabajadores requerida se tiene que $x \cdot 4 \cdot 6 = 768 \Rightarrow x = 768 \div 24 = 32$.
Entonces se requieren 32 trabajadores para construir el muro.

18. La cantidad de números naturales menores que 1000 que tienen al 1 y al 5 como dígitos es

a) 18
b) 20
c) 38
d) 54

Solución d) 54

Vamos a considerar los números de tres cifras XYZ, tenemos varias opciones, cuando son de la forma $X51$ tenemos diez diferentes opciones para X, luego cuando es de la forma $5X1$ se obtienen nueve opciones ya que $X=5$ se consideró en el caso anterior.
Después, los que son de la forma $X15$ igual con diez opciones, luego cuando es de la forma $1X5$ solamente nueve opciones ya que en el caso anterior se consideró $X=1$. Ahora de la misma forma existen ocho opciones de la forma 51X y otras ocho para 15X ya que se cuentan 2 opciones en casos anteriores. Por lo tanto existen 54 números con estas cifras.

19. Si un número a divide a $b \cdot c$ y el máximo común divisor de a y b es 1, entonces con certeza se puede asegurar que

a) a divide a b
b) a no divide a b
c) a divide a c
d) a no divide a c

Solución **c)** a divide a c

Si a divide a b, como $(a,b)=1$ entonces $a=1$, y así a divide a c. Si a no divide a b, entonces como a divide a $b \cdot c$ entonces debe dividir a c. En cualquiera de los casos a debe dividir a c.

20. La cantidad de números de la forma XYZ tales que el máximo común divisor entre sus dígitos X y Z es 2, y el máximo común divisor entre sus dígitos Y y Z es 3, corresponde a

a) 3
b) 4
c) 5
d) 6

Solución d) 6 Tenemos que el MCD entre Y y Z es 3 esto nos da que pueden tomar valores diferentes entre 9, 6 y 3. Sin embargo el MCD entre X y Z es 2, esto nos garantiza que Z debe ser 6 para cumplir ambas condiciones, luego X podría tomar los valores 2, 4 u 8. Con esto para concluir Y podría tomar cualquier valor entre 9 ó 3. Por lo tanto las posibles combinaciones para estos números corresponden a 3 (valores de X) por 2 (valores de Y) por 1 (valores de Z), o sea 6 números.

21. ¿Cuántos números pares de tres cifras al ser divididos por 5, por 7 y por 3 dejan residuo 1?

a) 5
b) 4
c) 3
d) 2

Solución **a) 5** Si al dividir un número par por 5, por 7 y por 3 deja residuo 1, entonces su antecesor debe ser un múltiplo impar de 5, de 7 y de 3. Como 3, 5 y 7 son primos relativos entonces cualquier múltiplo común a ellos debe ser un múltiplo de $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$. Entonces se busca un múltiplo impar de 105 que tenga únicamente 3 cifras. Ellos son: $105 \cdot 1 = 105$; $105 \cdot 3 = 315$; $105 \cdot 5 = 525$; $105 \cdot 7 = 735$; $105 \cdot 9 = 945$ y sus sucesores entonces son: 106, 316, 526, 736 y 946.

22. Si al inicio del curso lectivo 2012, un profesor de matemática le dice a los estudiantes que el único divisor compuesto del número correspondiente a su edad es él mismo, y que la edad que tendrá al finalizar el año será un cuadrado perfecto. ¿En qué año nació el profesor?

a) 1976
b) 1977
c) 1987
d) 1988

Solución **a**. 1976

Los números cuadrados perfectos que podrían ser la edad de un profesor de matemática son: 25, 36, 49 y 64. Sus antecesores son 24, 35, 48 y 63. De ellos, el que no tiene divisores compuestos diferentes de él mismo es 35.

Entonces el profesor cumple 36 años en el 2012 y por lo tanto nació en el año 1976.

23. Si cada vocal representa un dígito impar, de modo tal que $a = e + i + o$ y $o > i$. Entonces el mayor número de dos dígitos diferentes es

a) $10 \cdot a + u + 1$
b) $10 \cdot u + a + 1$
c) $10 \cdot a + o + 1$
d) $10 \cdot u + o + 1$

Solución a. $10 \cdot a + u + 1$

De la hipótesis $a = e + i + o$ se deduce que a debe ser 9 pues es $1 + 3 + 5 = 9$, además que u debe ser 7. Como el mayor número de dos dígitos diferentes es 98, y éste se puede expresar como $98 = 9 \cdot 10 + 8 = 9 \cdot 10 + 7 + 1$ entonces $98 = a \cdot 10 + u + 1$.

24. La cantidad de números primos menores que 100 tales que el mínimo común múltiplo de sus dígitos sea 6 corresponde a

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4

Solución b) 2

Los números de 0 a 100 que satisfacen que el mínimo común múltiplo de sus dígitos sea 6 corresponden a 66, 62, 63, 26, 36,16, 61, 23, 32. De ellos solo son primos el 61 y 23. Por lo tanto solamente dos números cumplen esta condición.

25. Doña Flor, que es la dependiente de la soda de un colegio, tarda 8 minutos en servir ensalada de frutas para toda una sección, y los estudiantes tardan 14 minutos en comérsela. Todas las secciones del colegio tienen igual número de estudiantes y pasan a la soda de una en una, en forma consecutiva. Si doña Flor tiene lista las ensaladas de una sección completa y una sección se encuentra en la soda en ese momento, ¿cuánto tiempo debe transcurrir para que suceda nuevamente que doña Flor termine de alistar las ensaladas en el mismo momento en que llega una nueva sección a la soda?

a) 0,75 horas
b) $0,9\overline{3}$ horas
c) 1,00 hora
d) $1,0\overline{6}$ horas

Solución b) $0,9\overline{3}$ horas

Se obtiene el mínimo común múltiplo de 8 y 14 que es 56 y esto corresponde a la cantidad de minutos por lo que al convertir esta en horas se obtiene $56 \div 60 = 0,9\overline{3}$ horas