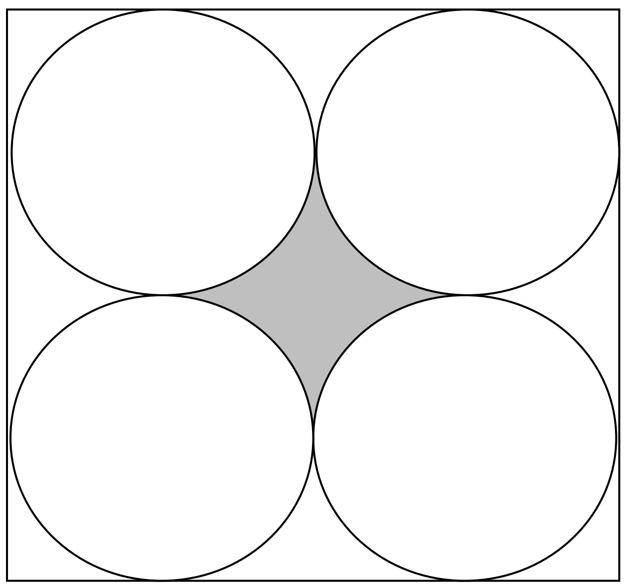
OLIMPIADA COSTARRICENSE

DE MATEMÁTICA

PROYECTO INTERINSTITUCIONAL

UNA-UNED-UCR-ITCR-MICIT-MEP

SOLUCIONES PRIMERA ELIMINATORIA NACIONAL



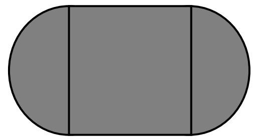
PRIMER NIVEL (7°)

2013

1. En la figura adjunta se muestra un cuadrado, con dos semicírculos en dos lados opuestos. Si el perímetro del cuadrado es de 40cm, entonces el área de la región sombreada con gris en centímetros cuadrados corresponde a

A) $100 + 25\pi$

B) $100 + 100\pi$



C) 200π

D) 178,5

Solución: Como el perímetro del cuadrado es 40cm, entonces cada lado del cuadrado debe de medir 10cm. Por lo que,
$\mathrm{A}_{\mathrm{cuadrado}} = 10^2 \text{ cm}^2 = 100 \text{ cm}^2$ y el área de los dos semicírculos es equivalente al

área de un solo círculo entonces,

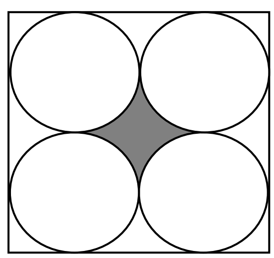
$A_{círculo} = \pi \cdot (5)^2 \text{ cm}^2 = 25\pi \text{ cm}^2$ por lo que el área total es;

$A_{Total} = (100 + 25\pi) \text{ cm}^2$ entonces la opción correcta es A.

2. El área sombreada con gris en centímetros cuadrados de la figura adjunta, que representa un cuatro círculos inscritos en un cuadrado cuya área es de 64cm^2 corresponde a

A) 16π

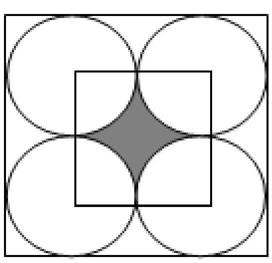
B) $32 - 4\pi$

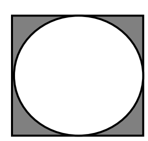


C) $64 - 4\pi$

D) $16 - 4\pi$

Solución: El área sombreada corresponde a la diferencia del área de un cuadrado cuyo lado mide la mitad del representado en la figura dada y uno de los círculos dados.





$$A_{cuadrado} = l^2$$

$$64 = l^2 \Rightarrow l = 8\text{cm}$$

Por lo que el área sombreada es,

$$A_{sombreada} = (4^2 - \pi(2)^2)\ \text{cm}^2 = (16 - 4\pi)\ \text{cm}^2$$

Entonces la opción correcta es D.

3. Dos descuentos sucesivos de 10% y de 20%, aplicados a un cierto artículo equivalen a un único descuento de

A) 15%

B) 28%

C) 30%

D) 32%

Solución: Al aplicar dos descuentos sucesivos de 10% y 20% se puede realizar lo siguiente:
Si que se afecte el resultado para cualquier otra cantidad por facilidad se supone que el costa inicial del objeto es de 100 entonces,

$$100 - (100)10\% = 100 - 10 = 90$$

Aplicando de nuevo el otro descuento se tiene,

$$90 - (90)20\% = 90 - 18 = 72$$

y

$$100 - 72 = 28$$

Lo que corresponde a un único descuento del 28%. Por lo que la opción correcta es B.

4. Un automóvil recorre 120 kilómetros en 3 horas, con rapidez constante. Entonces el tiempo en minutos que tarda dicho automóvil en recorrer 20 kilómetros con las mismas condiciones corresponde a

A) 10

B) 15

C) 20

D) 30

Solución: El tiempo que tarda el automóvil en recorrer 20 kilómetros se calcula así:

Si se designa con *x* el tiempo en minutos buscado se tiene que,

$$\frac{120\text{km}}{3\text{h}} = \frac{120\text{km}}{180\text{min}}$$

$$\frac{120}{180} = \frac{20}{x} \Rightarrow$$

$$x = \frac{180 \cdot 20}{120} = 30 \text{ min}$$

Entonces el tiempo que requiere el automóvil es de 30mim. Por lo que la opción correcta es D.

5. La empresa MUCHA PLATA ofrece a sus inversionistas duplicar el dinero por cada día que transcurra. Si un primer inversionista coloca dos colones a un plazo de 30 días. Entonces cuánto tiempo más deberá de transcurrir para que un segundo inversionista que colocó un colon, perciba la misma cantidad de dinero que recibió el primer inversionista en el treintavo día corresponde a

A) Un día

B) Siete días

C) Sesenta días

D) Noventa días

Solución: Construyendo la siguiente tabla:

Día	Primer Inversionista	Segundo Inversionista
1°	$4 = 2^{1+1}$	$2 = 2^1$
2°	$8 = 2^{2+1}$	$4 = 2^2$
3°	$16 = 2^{3+1}$	$8 = 2^3$
⋮	⋮	⋮
30°	$2^{30+1} = 2^{31}$	2^{30}
31°		2^{31}

Por lo que la opción correcta es la A.

6. Se tiene una piscina que se llena con 3000 litros de agua, la misma tiene una válvula de desagüe, por el cual desaloja agua en forma constante a razón de 64 litros por cada 4 horas, mientras que otra válvula vierte agua en forma constante en la piscina a razón de 57 litros cada tres horas. El tiempo que tarda la piscina en llenarse corresponde a

   A) 10 horas

   B) 100 horas

   C) 1000 horas

   D) 10000 horas

   Solución: Como la piscina está siendo abastecida a razón de 57 litros por cada 3 horas, que es equivalente a decir 19 litros por hora y sale agua a razón de 64 litros por cada 4 horas que equivalen a 16 litros por hora. Entonces hay una diferencia de 3 litros por hora a favor del llenado de la piscina, por lo que la piscina tardará en llenarse 1000 horas. Entonces la opción correcta es la C.

7. La cantidad de números primos menores que 100 que tienen al 1 como dígito es

   A) 7

   B) 8

   C) 9

   D) 10

   Solución: Los números menores que 100 que tienen al 1 como dígito son

   1, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 31, 41, 61, 71, 81 y 91,

   De ellos son primos: 11, 13, 17, 19, 31, 41, 61 y 71. En total son 8 números. Opción B la respuesta correcta.

8. Del conjunto $\{1,2,3,\ldots,99,100\}$ se extrae un número al azar. Entonces la probabilidad de que el número seleccionado sea menor a 25 corresponde a

A) $\frac{6}{25}$

B) $\frac{19}{25}$

C) $\frac{1}{4}$

D) $\frac{3}{4}$

Solución: En el conjunto dado existen 100 números, de los cuales 24 son menores que 25. Entonces la probabilidad solicitada es $\frac{24}{100}=\frac{6}{25}$. La Opción A es la correcta.

9. Para que el número de la forma 421A, en donde A es el dígito de las unidades, sea divisible por 6, el valor de A puede ser

A) 0

B) 2

C) 4

D) 6

Solución: Un número es divisible por 6 si es divisible por 2 y 3. El número 421A es divisible por 2 si A = 0, A = 2, A = 4, A = 6, A = 8. De esta manera los números disponibles son 4210, 4212, 4214, 4216, 4218

De los números anteriores solo 4212 y 4218 son divisibles por 3. De esta forma A = 2 o A = 8. Opción correcta la B

10. En un triángulo un ángulo interno mide 30º. Si para los otros dos ángulos se sabe que uno mide el doble del otro, entonces se puede afirmar que dicho triángulo es

A) equiángulo

B) obtusángulo

C) acutángulo

D) rectángulo

Solución: Sean α y β las medidas de los otros dos ángulos y considérese $\alpha = 2\beta$. Se tiene que $180º - 30° = 150°$ y $150° \div 3 = 50° \Rightarrow$ el ángulo menor mide 50° y el otro 2·50° = 100°. Entonces el triángulo es obtusángulo. Opción B la respuesta correcta.

11. El triple del producto de las edades de un padre y su hijo es 2013. Si ambos cumplen años el mismo día, entonces cuando nació el hijo, la edad del padre era

A) 48

B) 49

C) 50

D) 51

Solución: Como $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$, la edad del padre es 61 y la del hijo 11, por lo tanto la edad del padre era 50 cuando nació el hijo. Opción C la respuesta correcta.

12. La probabilidad de que se obtengan cinco escudos, al lanzar una moneda al aire 5 veces, corresponde a

A) $\frac{1}{32}$

B) $\frac{1}{25}$

C) $\frac{1}{2}$

D) 1

Solución: El número total de formas distintas en que salgan cara o escudos en 5 lanzamientos es $2^5 = 32$ y como la única forma de que salgan 5 escudos es 1, la probabilidad es $\frac{1}{32}$. Opción A la respuesta correcta.

13. Se desea envasar 84ml, 252ml y 378ml de tres sustancias distintas en el menor número de frascos con la misma capacidad y sin mezclarlas. La cantidad total de frascos es

A) 12

B) 17

C) 42

D) 119

Solución: El mcd de 84, 252 y 378 es 42 por lo que la cantidad total de frascos es $\frac{84}{42} + \frac{252}{42} + \frac{378}{42} = 2 + 6 + 9 = 17$. Opción B la respuesta correcta.

14. Se selecciona un número positivo de tres dígitos distintos, se resta a 200 ese número y se duplica esa diferencia. El mayor número que se puede obtener es

A) 154

B) 160

C) 196

D) 198

Solución: Se debe buscar el menor número de tres dígitos distintos para obtener mayor resultado, como 102 es el menor de los números de tres dígitos, el mayor resultado posible es $2\,(200-102)=2\cdot 98=196$. Opción C la respuesta correcta.

15. Tres grupos musicales dan conciertos cada 10 días, 6 días y 11 días respectivamente. Si el día 28 de febrero del 2013 los tres dan un concierto, la cantidad de conciertos que darán en un periodo de 4 años comenzando con este es

A) 4

B) 5

C) 6

D) 7

Solución: El mínimo común múltiplo de 10, 6 y 11 es 330 por lo que si comenzamos en febrero de este año, los conciertos siguientes serian aproximadamente en enero del 2014, diciembre del 2014, noviembre del 2015 y octubre del 2016. Por lo tanto, la cantidad es 5 conciertos. Opción B la respuesta correcta.

16. En un colegio hay 2013 estudiantes los cuales son puestos en una fila. A cada uno de estos estudiantes se le etiqueta desde el primero al último por medio del siguiente patrón: 1,2,3,4,5,4,3,2,1,2,3,4,5,4,3,2,1,… ¿Cuál es el número que le corresponde al estudiante que está en la posición 2013?

    A) 2

    B) 3

    C) 4

    D) 5

Solución: Esta es una sucesión de enteros que se va repitiendo de ocho en ocho términos. Tenemos entonces que ver cuántas veces alcanza 8 en 2013 y encontrar el residuo. Se tiene entonces que, según el algoritmo de la división de Euclides, $2013 = 251 \; x \; 8 + 5$. Luego el 2013 será el quinto elemento de la sucesión 1,2,3,4,5,4,3,2, es decir el 5, y por lo tanto la respuesta correcta es la opción D.

17. Una canasta contiene 39 balones. Para estos balones se sabe lo siguiente:

    - Hay al menos un balón para baloncesto.
    - Siempre que se sacan tres balones cualesquiera, al menos dos son para fútbol.

    ¿Cuántos balones para baloncesto hay en la canasta?

    A) 1

    B) 2

    C) 4

    D) 38

Solución: La respuesta correcta es la A, es decir que solamente hay un balón para baloncesto, ya que de haber dos se tendría un posible caso que al sacar tres balones dos de ellos serían de baloncesto, lo cual contradice el hecho de que siempre que saquemos tres dos al menos deben ser de fútbol.

18. Se tienen dos canastas A y B que contienen bolinchas, de la siguiente manera:
    - Las bolinchas de A son de plástico y las de B de vidrio.
    - En A hay 5 bolinchas rojas y 6 azules, mientras que en B hay 3 rojas y 4 azules.

    Se deben sacar cierta cantidad de bolinchas de cada canasta al mismo tiempo y sin ver ¿Cuál es la menor cantidad que se debe sacar para tener seguridad de encontrar entre todas las bolinchas sacadas, dos del mismo color pero de diferente material?

    A) 3

    B) 4

    C) 5

    D) 6

Solución: Se deben analizar los casos extremos. Con $n = 1$ no hay seguridad de que al sacar una bolincha de A y una bolincha de B sean del mismo color. Con $n = 2$ el caso extremo es sacar de A dos rojas o dos azules, y se puede dar el caso de que al sacar de B dos bolinchas éstas sean dos azules o dos rojas, luego no hay seguridad en este caso. El caso $n = 3$ tampoco aporta seguridad porque bien se pueden sacar de A tres rojas o tres azules y de B sacar tres azules o tres rojas. El caso $n = 4$ no aporta seguridad ya que se pueden sacar de A cuatro rojas y de B 4 azules. Luego $n = 5$ parece que sí, ya que el peor caso es sacar de A 5 rojas o 5 azules. Entonces de B necesariamente se tienen que sacar para tener cinco la descomposición de 5 en suma de enteros que son: 1+4, 2+3, 3+2. Luego sí hay seguridad en este caso de que con $n = 5$ siempre podemos sacar dos bolinchas del mismo color pero de diferente material. Opción C la correcta.

19. Consideremos una fracción en donde tanto el numerador como el denominador son números enteros positivos, y se sabe que tal fracción es mayor que $\frac{1}{2}$, pero menor que 1 ¿Cuál de los siguientes valores no es posible obtener al sumar el numerador y denominador?

    A) 3

    B) 5

    C) 8

    D) 2013

Solución: Por la condición del problema se tiene que $a < b$ y que $2a > b$, luego se concluye que $a < b < 2a$. De donde $2a < a + b < 3a$. Aquí la respuesta correcta sería C, ya que para poder obtener tres necesitamos $2a < 3 < 3a$ lo cual es absurdo.

Por otra parte, 5 sí se puede obtener a partir de $\frac{2}{3}$, 8 a partir de $\frac{3}{5}$ y 2013 como $\frac{1006}{1007}$.

20. En la siguiente expresión $\dfrac{O\times L\times C}{O\times M\times A}$ cada letra mayúscula representa un dígito, las letras iguales representan dígitos iguales, y las letras diferentes representan dígitos diferentes ¿Cuál es el mayor posible valor de tal expresión?

    A) 28

    B) 36

    C) 72

    D) 88

Solución: Si hacemos una simplificación tendremos que nuestra expresión original se convierte en $\dfrac{L\times C}{M\times A}$.

El mayor valor de tal expresión será cuando el numerador ser lo mayor posible y el denominador sea lo menor posible. Resulta entonces que, lo más grande que podemos tener en el numerador es 9x8=72, y lo más pequeño que podemos tener en el denominador es 1x2=2. Luego el mayor valor de la expresión de arriba debe ser 36. La opción correcta es B.

21. Si □ABCD, □ABFG y □GFEH son caras de un cubo, entonces un punto que está en el mismo plano que B, F y D corresponde a

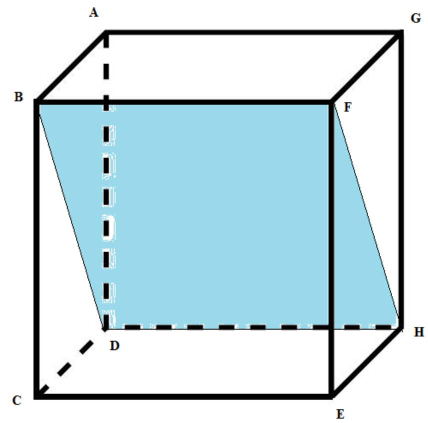
    A) C

    B) E

    C) G

    D) H

Solución:
Según los datos, se tiene una figura como la siguiente, donde H es coplanar a B, F y D.



Respuesta correcta la opción D.

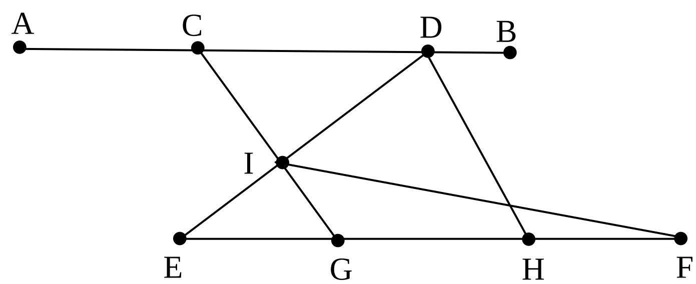
22. En la figura, el cuadrilátero □CDHG es a un paralelogramo. Además la $m\angle DHF = 120°$ y $m\angle CDI = 30°$. Entonces con certeza se cumple:

   A) el ΔIEF es acutángulo

   B) el ΔIEF es rectángulo

   C) $m\angle DCG = 60°$

   D) $m\angle DIG = 120°$



Solución: Al ser □CDHG un romboide, se deduce que los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{EF}$ son paralelos, al igual que $\overline{CG}$ y $\overline{DH}$. Así que $m\angle CGF = 120°$ por ser ángulo correspondiente con $m\angle DHF$ y la $m\angle DEG = 30°$ por ser alterno interno con $m\angle CDI$. Por el Teorema de la medida del ángulo externo $m\angle DEG + m\angle EIG = m\angle CGF$, así que $m\angle EIG = 90°$. Por lo tanto el ΔIEG es rectángulo y además la $m\angle EIG = m\angle CID$, por ser opuestos por el vértice entonces $m\angle DCG + m\angle DIC + m\angle CDI = 180° \Rightarrow m\angle DCG = 60°$. Respuesta C la correcta.

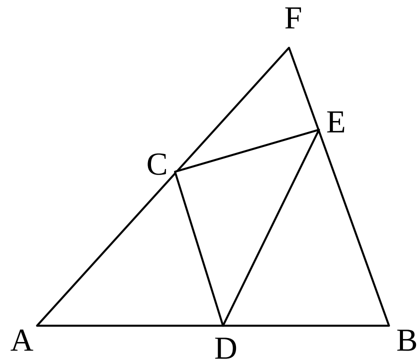
23. Se construyen triángulos de tal manera que todas las longitudes de sus lados son números enteros. Si $\mathrm{AD} = \mathrm{CD} = 3\mathrm{cm}$, $\mathrm{FE} = 2\mathrm{cm}$, $\mathrm{EB} = 5\mathrm{cm}$ y el resto de los segmentos tienen la misma medida ¿Cuál es la menor medida posible para estos segmentos?

A) 1cm

B) 2cm

C) 3cm

D) 4cm



Solución: Aplicando la desigualdad triangular en los cinco triángulos que aparecen y recordando que las longitudes de los segmentos son enteras; se tiene que:

del $\Delta\mathrm{ACD}: 3 + x > 3$ y $6 > x$,

del $\Delta\mathrm{CED}$: $2x > 3$,

del $\Delta\mathrm{DEB}$: $2x > 5$,

del $\Delta\mathrm{CFE}$: $2x > 2$

y del ΔAFB: $2x + 7 > 3 + x$, $10 + x > 2x$ y $3x + 3 > 7$.

El menor número entero positivo que satisface esas condiciones es $x = 3cm$. Respuesta C.

24. La medida de los ángulos internos de un triángulo son tales que si se ordenan de mayor a menor, la diferencia entre cada dos consecutivos es 10 grados ¿Qué tipo de triángulo es?

A) equiángulo

B) acutángulo

C) rectángulo

D) obtusángulo

Solución: Si se considera como m la medida del menor de los ángulos, entonces al sumar los ángulos externos obtenemos la igualdad $3m + 30° = 180°$, es decir que m debe ser igual a $50°$ para que la igualdad se cumpla. Así la medida de los ángulos internos corresponde a $70°, 60°$ y $50°$. Por lo tanto el triángulo es acutángulo. Respuesta B la opción correcta.

25. A un triángulo obtusángulo se le traza una de sus alturas obteniendo así dos triángulos simétricos. A otro triángulo acutángulo se traza dos de sus alturas y se obtiene también dos triángulos simétricos con cada altura. Con certeza, estos triángulos son

    A) isósceles y equilátero

    B) equilátero y escaleno

    C) isósceles no equiláteros

    D) equilátero e isósceles

Solución: Resulta ser que el enunciado vienen siendo prácticamente propiedades en geometría. Al referirse de triángulo obtusángulo se descarta la idea de ser equilátero, al referirse que se forma dos triángulos simétricos se descarta la opción de ser escaleno siendo así un triángulo isósceles. Para el otro, puede que sea isósceles o equilátero, pero al obtener triángulos simétricos con dos alturas, se deduce que debe ser equilátero. Por lo tanto la respuesta correcta es la A.

26. Juan se ha propuesto caminar 15 metros por cada minuto. Pasa por las casas A, B, C y D en ese orden, durando de B a C el doble de lo que tarda de A a B, y de C a D tarda lo mismo que de B a C, por último decide devolverse a la casa A tomando la misma ruta. Si Juan duró un total de una hora y cuarenta minutos, entonces ¿Cuál es la distancia entre las casas A y C?

    A) 300m

    B) 450m

    C) 500m

    D) 900m

Solución: Juan dura haciendo el recorrido hora y cuarenta minutos, equivalente a 100 minutos, o sea que recorre 1500 metros. Si la distancia de B a C y de C a D es el doble de A a B, note que el recorrido sería lo mismo que decir diez veces de A a B. Entonces la distancia de A a B equivale a 150 metros, y como de B a C es el doble, ese sería 300 metros, por lo tanto la distancia que hay entre las casas A y C corresponde a 450 metros. Respuesta correcta la B.

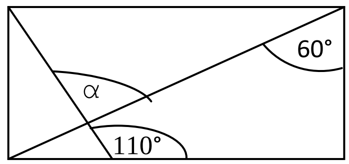
27. En el rectángulo de la figura adjunta, la medida del ángulo α corresponde a

A) 70°

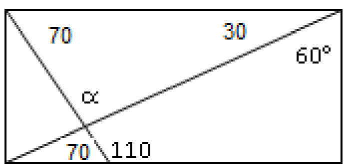
B) 80°

C) 110°

D) 150°



Solución: El ángulo adyacente al que mide 110° mide 180° – 110° = 70° y por ser ángulos alternos internos entre paralelas, uno de los ángulos internos del triángulo que contiene a α mide 70, como el otro ángulo de ese triángulo mide 90° – 60° = 30°, entonces α = 180 – 70 – 30 = 80. Opción B la respuesta correcta.



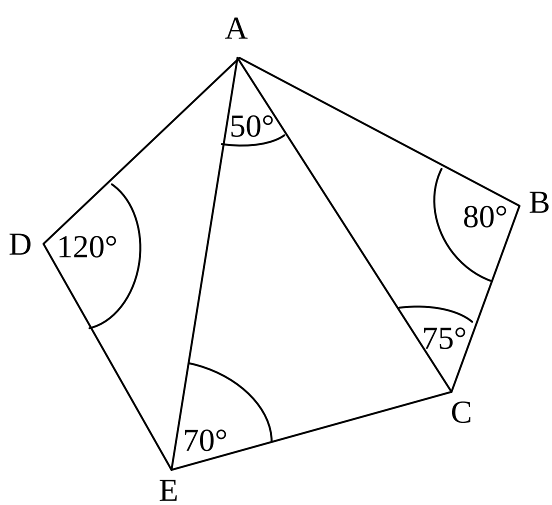
28. De acuerdo con la información que se proporciona en la siguiente figura, el segmento de mayor longitud es

A) $\overline{AE}$

B) $\overline{AD}$

C) $\overline{AB}$

D) $\overline{AC}$



Solución: Para el triángulo ΔAOE obtusángulo, se tiene que el segmento de mayor longitud es $\overline{AE}$. Pero para el triángulo ΔAEC el segmento con mayor longitud es $\overline{AC}$, pues se opone al ángulo de mayor medida. Lo mismo pasa con el triángulo ΔABC, pues el segmento con mayor longitud es $\overline{AC}$, ya que se opone al ángulo de mayor medida. Por lo tanto el segmento de mayo longitud es $\overline{AC}$. Respuesta D la correcta.

29. Cuatro estudiantes: Eny, Raquel, Brenda y Alicia participaron durante dos semanas en la Escuela Matemática Latinoamericana y del Caribe. Cada una viene de un lugar diferente: Sarapiquí, Santo Domingo, Moravia y Birrisito. Además se cuenta con la siguiente información:

- Eny y la estudiante de Birrisito compartieron habitación
- Eny nunca ha estado en Sarapiquí ni en Moravia
- En un partido de fútbol que se realizó entre semana, Brenda jugó en el mismo equipo que la estudiante de Sarapiquí, mientras que la estudiante de Birrisito estaba en el equipo opuesto.
- La estudiante de Sarapiquí y Alicia pasaban jugando ajedrez.

¿De qué lugar es Alicia?

A) Sarapiquí

B) Moravia

C) Birrisito

D) Santo Domingo

Solución: De la primera afirmación se deduce que Eny no vive en Birrisito, y de la segunda que tampoco vive en Moravia ni en Sarapiquí, luego se concluye que Eny vive en Santo Domingo.

Por la tercera afirmación, Brenda no es de Sarapiquí, ni de Birrisito. Además no es de Santo Domingo, por lo tanto debe ser de Moravia.

Alicia entonces no es de Santo Domingo, ni de Moravia, pero por la cuarta afirmación tampoco es de Sarapiquí, y por lo tanto es de Birrisito. Luego, la respuesta correcta es C.

30. Considere tres puntos colineales A, B y C y dos puntos D y E tales que $\overleftrightarrow{AD}$ y $\overleftrightarrow{BE}$ son perpendiculares a $\overleftrightarrow{AB}$. Analice las siguientes proposiciones:

I. Si B está entre A y C entonces $\overline{CD}$ interseca a $\overline{AB}$.

II. Si C está entre A y B entonces $\overline{CE}$ interseca a $\overline{DB}$.

De ellas, son siempre verdaderas

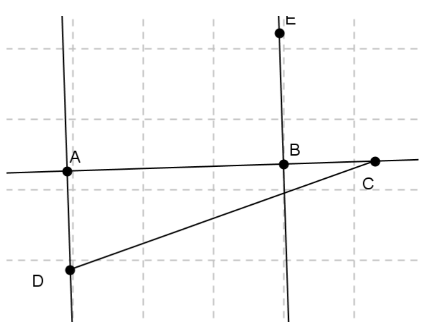
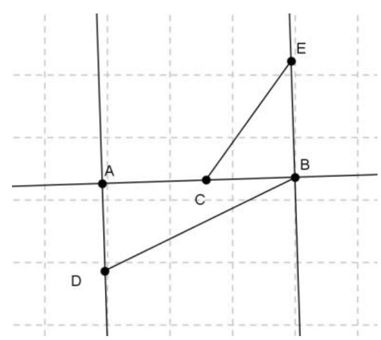
A) Solamente II

B) Solamente I

C) Ninguna

D) Ambas

Solución:

<table>
<tr>
<td>I no ocurre sin importar en qué semiplano se encuentre D respecto a $\overleftrightarrow{AB}$:

</td>
<td>II no siempre ocurre pues puede suceder lo siguiente:

</td>
</tr>
</table>

Respuesta C la correcta.