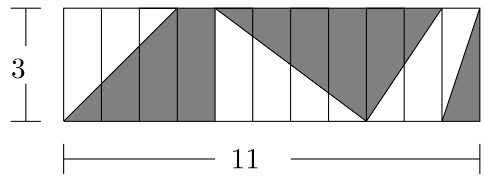
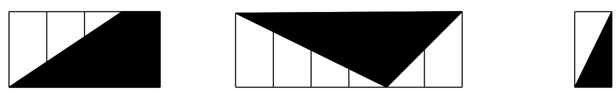
1. Determine el área sombreada en la figura adjunta



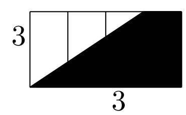
(a) 15
(b) 16
(c) 17
(d) 18

Solución

Separemos la figura así:

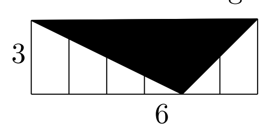


Considere la figura:



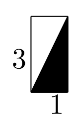
el área sonbreada en esta figura es 7,5.

Ahora considere la figura:



Su área sombreada es 9.

Por último considere la figura:



Su área es 1,5

$\therefore$ El área sombreada total es: $7{,}5 + 1{,}5 + 9 = 18$

2. Un camión puede llevar 25 sacos de cemento o 200 de arroz. Si en un viaje colocan 12 sacos de cemento, cuantos sacos de arroz podrá llevar el camión en ese viaje

   (a) 48
   (b) 52
   (c) 96
   (d) 104

Solución

Por cada saco de cemento se llevan 8 de arroz; como el camión lleva 12 sacos de cemento, eso es el equivalente a $12 \cdot 8 = 96$ sacos de arroz, por lo que el camión aún puede llevar 104 sacos de arroz.

3. Juan y Pedro se reparten un pastel. Pedro se quedó con $\frac{1}{3}$ y Juan con el resto. Para ser más equitativos, Juan cortó la cuarta parte de su porción y se la dió a Pedro. Entonces la cantidad de pastel que tiene Juan es

   (a) $\frac{1}{4}$
   (b) $\frac{5}{12}$
   (c) $\frac{1}{2}$
   (d) $\frac{7}{12}$

Solución

Después de partir el pastel Juan se queda con $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ del pastel y luego al cortar la cuarta parte que equivale a $\frac{2}{3} \div 4 = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$, se la dió a Pedro por lo que se queda con $\frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

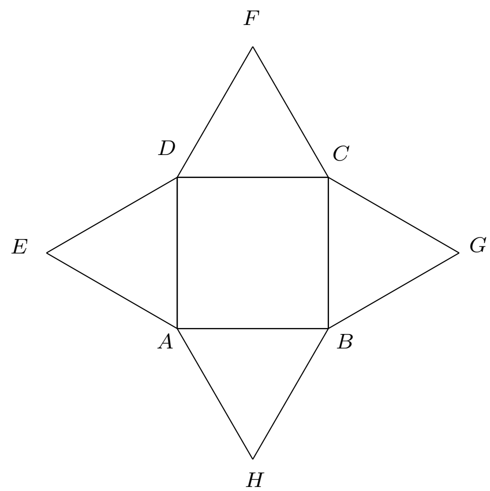
4. Un frasco que contiene cincuenta monedas de 100 colones pesa $1400g$, si el frasco vacío pesa $250g$ entonces el peso, en gramos, de una moneda es

   (a) $11,5$
   (b) 14
   (c) 23
   (d) 28

Solución

El peso de las cincuenta monedas es $1400 - 250 = 1150$ por lo que el peso de una moneda es $1150 \div 50 = 23$.

5. En la siguiente figura, el $\square ABCD$ es un cuadrado, y los triángulos son equiláteros, si el área del $\square ABCD$ es 25, determine el perímetro de la figura.



(a) 40
(b) 50
(c) 60
(d) 80

Solución

Como el área del $\square ABCD$ es 25 entonces su lado es 5.
Para determinar el perímetro se deben considerar los 8 lados externos, así $P = 8 \cdot 5 = 40$.

6. En una tubería de gas de 6km de longitud se deben hacer agujeros cada 120m para conectar con tuberías secundarias y cada 300m para instalar válvulas de control. (En caso de coincidir se pueden instalar ambas en un mismo agujero). Si el primer agujero coincide al inicio de la tubería, ¿Cuántos hoyos se requieren en total?

(a) 60
(b) 61
(c) 72
(d) 600

Solución

Como el M.C.M de 120 y 300 es 600, quiere decir que cada 600m coincide un agujero. Como hay un hoyo al inicio de la tubería, coinciden un total de 11 hoyos ($6000 \div 600 + 1$).

Por otro lado se requieren 51 agujeros las salidas secundarias ($6000 \div 120 + 1$) y 21 para las válvulas ($6000 \div 300 + 1$), es decir, 72 hoyos, de los cuales coinciden 11.

Por lo tanto se deben hacer un total de 61 agujeros.

7. Un carpintero tiene un trozo de madera de $60cm \times 36cm \times 24cm$ y quiere cortarlo para obtener cubos del mayor tamaño posible sin desperdiciar nada de madera. ¿Cuántos cubos puede obtener?

   (a) 360
   (b) 30
   (c) 12
   (d) 7

Solución

El máximo común divisor de $60, 36, 24$ es 12, de modo que puede obtener 30 cubos de $12cm$ de lado.

8. Una fábrica de perfumes tienen 13 litros de perfume para envasar en frascos de $30ml$, $40ml$ y $80ml$, los cuales irán a lotes diferentes. Se requiere que la diferencia, en ml, entre cada lote sea la menor posible y que no sobre nada de perfume. Entonces la cantidad de frascos de $40ml$ que se envasa es

   (a) 40
   (b) 108
   (c) 109
   (d) 144

Solución

M.C.M $(30, 40, 80) = 240$. Si se envasan 8 frascos de $30ml$, 6 de $40ml$ y 3 de $80ml$ se tiene $720ml$ repartidos en igual cantidad en cada lote ($240ml$ en cada una). Ahora, $13l = 13000ml$ $13000 = 720 \cdot 18 + 40$, es decir, si se repite el procedimiento 18 veces se tiene la misma cantidad de ml en cada lote y sobran $40ml$, que se envasan en un frasco adicional. Por lo tanto se envasan $6 \cdot 18 + 1 = 109$ frascos de $40ml$.

9. En la siguiente cuadrícula se deben escribir los números 1, 2 y 3 de manera que un número no aparezca dos veces en la misma fila o columna. Los números que pueden escribirse en la casilla marcada con $*$ corresponden a

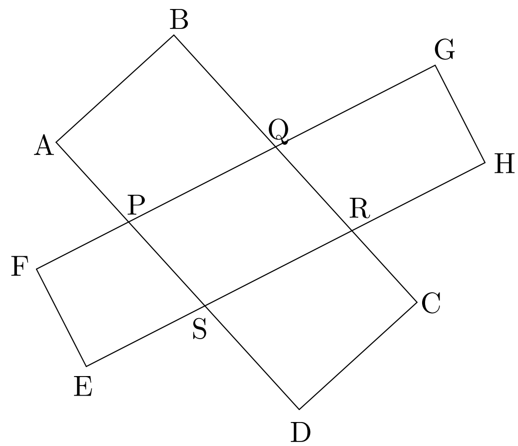
1	$*$	
2	1	

   (a) Sólo 2
   (b) Sólo 3
   (c) Cualquiera 2 o 3
   (d) No es posible

Solución

En la primera casilla de la tercer fila solo puede ponerse 3 por lo que en la segunda casilla de esa tercera fila solo puede ponerse 2 y así en la casilla con $*$ solo puede ponerse 3.

10. En la figura adjunta $\square ABCD$ y $\square EFGH$ son rectángulos.



Se puede asegurar que $m\angle APF + m\angle BRH$ es

(a) 150^o
(b) 180^o
(c) 210^o
(d) 225^o

Solución

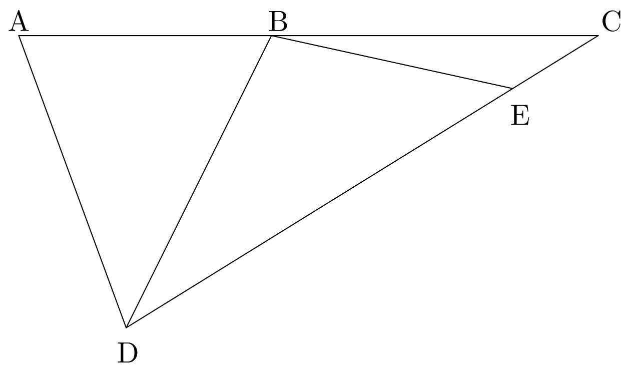
$\angle APF \cong \angle ASE$ por ser correspondientes entre paralelas.

$\angle ASE \cong \angle BRE$ por la misma razón.

$\angle BRE$ y $\angle BRH$ son adyacentes, por lo que son suplementarios, es decir, $m\angle BRE + m\angle BRH = 180^o$.

$\therefore m\angle APF + m\angle BRH = 180^o$

11. En la figura adjunta, si $AB = 4$, $AD = 5$, $DE = 6$, $EC = 2$, $BE = 4$ y $BD = BC$. ¿Cuántos números enteros corresponden a las medidas de $\overline{BD}$



(a) 2

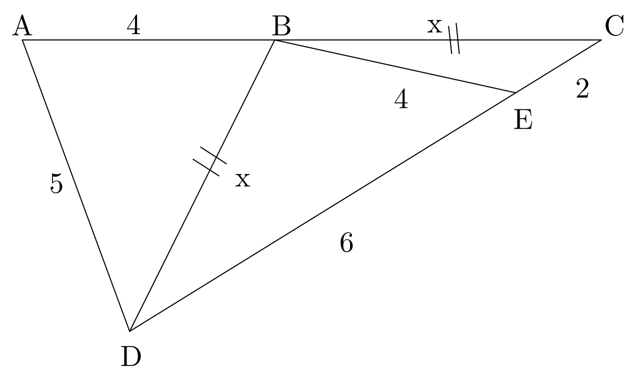
(b) 3

(c) 5

(d) 7

Solución

Considere la siguente figura:



En el $\triangle ABD$	$x+4>5 \ \wedge \ 4+5>x$	$\Rightarrow$	$1<x<9$	(1)
En el $\triangle DBE$	$x+4>6 \ \wedge \ 4+6>x$	$\Rightarrow$	$2<x<10$	(2)
En el $\triangle BEC$	$x+2>4 \ \wedge \ 4+2>x$	$\Rightarrow$	$2<x<6$	(3)
En el $\triangle ADC$	$8+5>4+x \ \wedge \ 5+4+x>8$	$\Rightarrow$	$0<x<9$	(4)

De (1), (2), (3) y (4) se obtiene que $2<x<6$.

Por lo que BD puede tomar los valores del siguiente conjunto $\{3,4,5\}$.

12. ¿Cuántos posibles números de la forma $5a6b$ son divisibles por 6?. Siendo a y b los dígitos de las centenas y unidades respectivamente.

   (a) 5
   (b) 10
   (c) 16
   (d) 32

Solución

El número entero $5a6b$ es divisible por seis si es divisible por dos y por tres a la vez.

$5a6b$ es divisible por dos si $b \in \{0, 2, 3, 4, 6, 8\}$

$5a6b$ es divisible por tres si $5 + a + 6 + b$ es divisible por tres $\Rightarrow 11 + a + b$ es divisible por tres.

Si $b = 0$ entonces $a \in \{1, 4, 7\} \Rightarrow 3$ números diferentes.

Si $b = 2$ entonces $a \in \{2, 5, 8\} \Rightarrow 3$ números diferentes.

Si $b = 4$ entonces $a \in \{0, 3, 6, 9\} \Rightarrow 4$ números diferentes.

Si $b = 6$ entonces $a \in \{1, 4, 7\} \Rightarrow 3$ números diferentes.

Si $b = 8$ entonces $a \in \{2, 5, 8\} \Rightarrow 3$ números diferentes.

Así en total hay 16 números diferentes.

13. ¿Cuál de las siguientes parejas de números enteros tienen más divisores en común?

   (a) 24 y 18
   (b) 56 y 98
   (c) 72 y 36
   (d) 105 y 216

Solución

$$\begin{array}{c} 24 = 2^3 \cdot 3 \\ 18 = 3^2 \cdot 2 \end{array} \Rightarrow \text{Divisores en común } \{1, 2, 3, 6\}$$

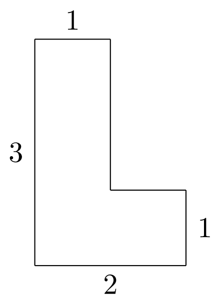
$$\begin{array}{c} 56 = 2^3 \cdot 7 \\ 98 = 7^2 \cdot 2 \end{array} \Rightarrow \text{Divisores en común } \{1, 2, 7, 14\}$$

$$\begin{array}{c} 72 = 2^3 \cdot 3^2 \\ 36 = 2^2 \cdot 3^2 \end{array} \Rightarrow \text{Divisores en común } \{1, 2, 2^2, 3, 3^2, 6, 12, 36\}$$

$$\begin{array}{c} 105 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \\ 216 = 2^3 \cdot 3^3 \end{array} \Rightarrow \text{Divisores en común } \{3\}$$

Por lo que la pareja de números que tiene más divisores en común es 72 y 36

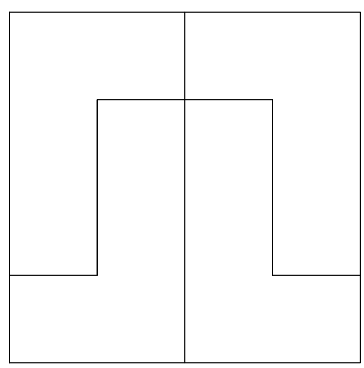
14. ¿Cual es la medida del lado del cuadrado de menor tamaño que puede formarse utilizando unicamente piezas como la figura adjunta? (Las piezas pueden girarse, trasladarse y voltearse)



(a) 4
(b) 6
(c) 8
(d) 10

Solución

Se puede formar un cuadrado de tamaño 4×4 utilizando 4 piezas.



15. Si ayer cumplí 20 años y el próximo año cumpliré 22 años. ¿Cuál es la fecha de mi cumpleaños?

(a) 29 de febrero
(b) 31 de diciembre
(c) 01 de enero
(d) 28 de febrero

Solución

La conversación se realiza el 01 de enero y la fecha del cumpleaños número 20 es el 31 de diciembre del año anterior, por lo que el siguiente año cumplirá 22 años.

16. Emma gastó 2400 colones de sus ahorros en una entrada al cine, si esa cantidad representa las $\frac{4}{7}$ partes de sus ahorros, determine cuanto dinero tenía ahorrado Emma.

 (a) 9 00 colones
 (b) 2 400 colones
 (c) 4 200 colones
 (d) 4 900 colones

Solución

Por regla de 3

$$\frac{4}{7} = \frac{2400}{x}$$

así $x = \frac{2400 \cdot 7}{4}$

$$x = 600 \cdot 7$$

$$x = 4200$$

Así Emma tenía ahorrado 4200 colones.

17. En una escuela hay 120 estudiantes, los cuales pueden inscribirse en taller de artes marciales, taller de robótica o ambos. Si se sabe que 100 estudiantes matricularon artes marciales y 50 estudiantes robótica, determine cuántos estudiantes matricularon únicamente robótica.

 (a) 20 estudiantes
 (b) 25 estudiantes
 (c) 30 estudiantes
 (d) 40 estudiantes

Solución

Hay 120 estudiantes y 20 **NO** matricularon artes marciales entonces esos 20 matricularon únicamente robótica.

18. Por un error en la fotocopiadora, en un libro de 400 páginas se dejaron en blanco todas las páginas cuyos números de página eran múltiplos de 3 o de 4, determine cuántas páginas se fotocopiaron correctamente.

 (a) 150
 (b) 200
 (c) 220
 (d) 250

Solución

Se dejaron en blanco todas las páginas múltiplos de 3, las cuales son 133.
También se dejaron en blanco todas las páginas múltiplos de 4, que son 100. Ahora se deben restar todas las que son múltiplos de ambos (pues se restaron dos veces) que son los múltiplos de 12 las cuales son 33. Por lo cual se dejaron en blanco $133 + 100 - 33 = 200$ páginas y se fotocopiaron correctamente 200 páginas.

19. Melvin quiere sacar un par de medias de una caja en donde hay 20 negras, 50 blancas y 10 rojas. Entonces la cantidad mínima de medias que debe sacar sin ver para estar seguro que tiene un par del mismo color es

    (a) 4
    (b) 11
    (c) 50
    (d) 79

Solución
Como las medias son de tres colores distintos, si Melvin saca 4 habrá por lo menos dos del mismo color.

20. El dígito de las unidades del número 23^{2014} corresponde a

    (a) 1
    (b) 3
    (c) 7
    (d) 9

Solución
Observe que los digitos de las unidades de las potencias de 23 son: de 23^1 es 3, 23^2 es 9, 23^3 es 7, 23^4 es 1 y a partir de ahí se repite un ciclo de periodo 4. Como $2014 = 503 \cdot 4 + 2$, al ser residuo 2 entonces 23^{2014} termina en 9.

21. La cantidad de números que hay entre 100 y 300 (sin contarlos) que sean divisibles entre 3 y 5 son

    (a) 91
    (b) 92
    (c) 93
    (d) 94

Solución
Entre 100 y 300 el menor y mayor múltiplo de 3 son 102 y 297, así la cantidad que hay entre ellos es $(297 - 102) \div 3 = 65$; es decir, $65 + 1 = 66$ múltiplos de 3 pues se incluyen los dos. De forma análoga hay $(295 - 102) \div 5 + 1 = 39$ múltiplos de 5. Pero hay que quitar los múltiplos comunes; es decir, los múltiplos de 15 que son $(285 - 105) \div 15 + 1 = 13$. Por lo tanto, hay $66 + 39 - 13 = 92$ múltiplos de 3 y 5 entre 100 y 300.

22. Considere un cuadrilátero $ABCD$ de lados paralelos opuestos $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$. Si $BD = AD$, $m\angle DCB = 110°$ y $m\angle CBD = 30°$ entonces $m\angle ADB$ es

(a) $110°$
(b) $85°$
(c) $95°$
(d) $100°$

Solución

Al trazar la diagonal $\overline{BD}$ del cuadrilátero $ABCD$ en el triángulo BCD se tiene que $m\angle CDB = 180° - m\angle DCB - m\angle CBD = 40°$. Como los ángulos CDB y ABD son alternos internos y $BD = AD$ entonces $m\angle ABD = m\angle DAB = 40°$. Así,

$$m\angle ADB = 180° - m\angle ABD - m\angle DAB = 180° - 2 \cdot 40° = 100°$$

23. En un triángulo isósceles ABC los lados de igual longitud son $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$. Si D, E, F son puntos sobre los lados $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$ respectivamente tales que el triángulo DEF es equilátero y si $a = m\angle BFD$, $b = m\angle ADE$ y $c = m\angle FEC$ entonces se cumple que

(a) $b = \frac{a+c}{2}$
(b) $b = \frac{a-c}{2}$
(c) $a = \frac{b+c}{2}$
(d) $a = \frac{b-c}{2}$

Solución

Por el teorema de la medida del ángulo externo se tiene que $b + 60° = m\angle ABC + a$ y que $a + 60° = c + m\angle ACB$, restando ambas ecuaciones se obtiene

$$\begin{aligned}(b + 60°) - (a + 60°) &= (m\angle ABC + a) - (c + m\angle ACB)\\ b - a &= a - c + m\angle ABC - m\angle ACB\end{aligned}$$

y como $m\angle ABC = m\angle ACB$ por ser $(AB = AC)$ entonces $b - a = a - c$, es decir, $a = \frac{b+c}{2}$.

24. Dados seis puntos colineales, el mayor número de segmentos determinados por estos puntos corresponde a

(a) 12
(b) 13
(c) 14
(d) 15

Solución

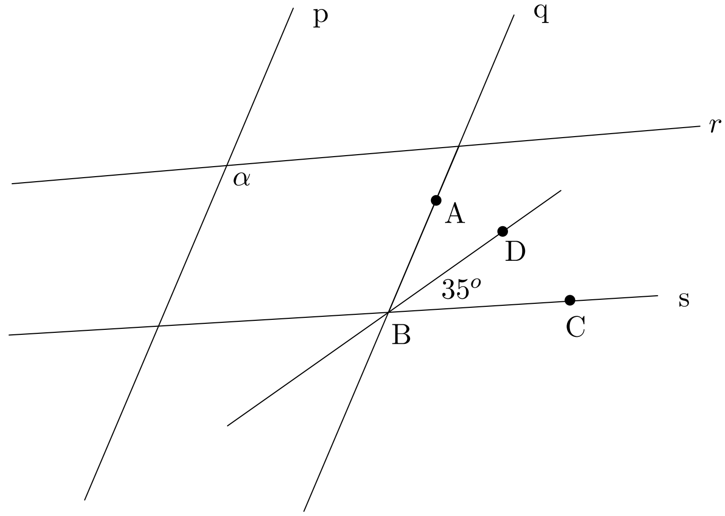
Como el número de segmentos (NS) que se pueden determinar dada n cantidad de puntos colineales está determinado por:

$$NS = \frac{n(n-1)}{2}$$

Sustituyendo $n = 6$ se obtiene,

$$NS = \frac{6(6-1)}{2} = 15$$

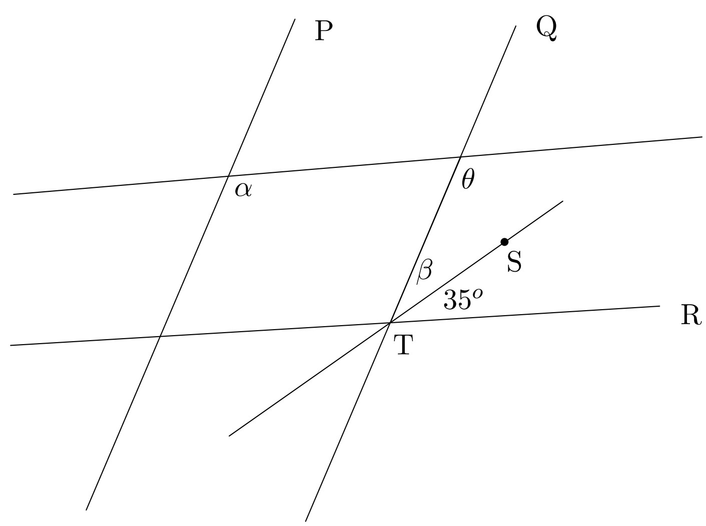
25. Si $p \parallel q$, $r \parallel s$ y $\overleftrightarrow{BD}$ es una bisectriz del $\angle ABC$ entonces la medida del ángulo α es



(a) 35°
(b) 70°
(c) 110°
(d) 145°

Solución

Considere la siguiente figura



Debido a que $\overleftrightarrow{ST}$ es bisectriz del $\angle RTQ$, $m\angle\beta = 35^o$ y en consecuencia $m\angle RTQ = 70^o$.
Por otra parte $\angle RTQ$ y $\angle\theta$ son conjugados por lo que $m\angle\theta = 110^o$.
Por último los ángulos α y θ son correspondientes y por lo tanto congruentes. Así $\alpha = 110^o$.