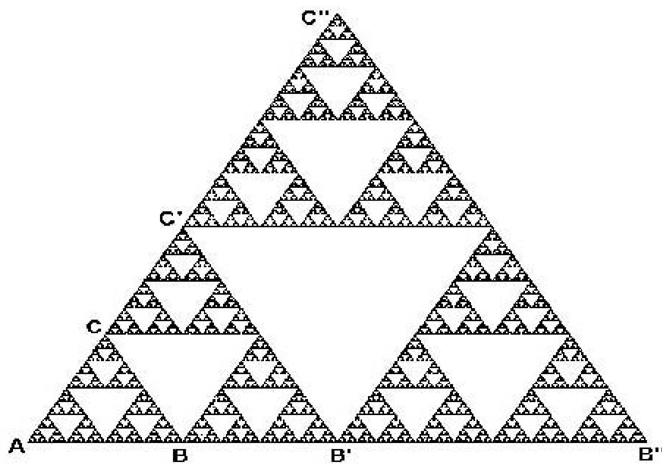
XXVII OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA

UNA - UCR - TEC - UNED - MEP - MICIT

SOLUCIÓN PRIMERA ELIMINATORIA NACIONAL



I Nivel

(7°)

2015

1. Cinco extranjeros están colocados en fila. El mexicano está después del italiano. El argentino está antes del mexicano y justo después del jamaiquino. El jamaiquino no es el primero de la fila y está antes del italiano. Entonces, el costarricense está justo antes del

   (a) Mexicano
   (b) Italiano
   (c) Argentino
   (d) Jamaiquino

   Solución

   Respuesta correcta: opción d.

   Por las condiciones, el mexicano está después del italiano, argentino y jamaiquino. Luego, el argentino está justo después del jamaiquino y como el jamaiquino está antes del italiano, el orden hasta el momento es jamaiquino, argentino, italiano y mexicano. Ahora, como el jamaiquino no es el primero, el costarricense tiene que ser el primero y está justo antes del jamaiquino.

2. Del conjunto $\{15, 16, 17, \cdots, 99, 100\}$ se extrae un número al azar. La probabilidad de que el número seleccionado tenga alguno de sus dígitos igual a 6 corresponde a

   (a) $\frac{5}{43}$
   (b) $\frac{9}{43}$
   (c) $\frac{9}{85}$
   (d) $\frac{18}{85}$

   Solución

   Respuesta correcta: opción b.

   Se cuentan cuántos números del conjunto tienen alguno de sus dígitos igual a 6, los cuales son 18 y se divide entre el total de números en el conjunto que corresponde a 86, por tanto la probabilidad es $\frac{18}{86} = \frac{9}{43}$.

3. En una escuela realizarán la final del campeonato de futbol; para ello deciden alquilar una cancha. En esta disponen de dos horarios distintos los lunes y viernes, mientras que los martes, miércoles y viernes disponen de tres horarios en los que se puede realizar el partido. La probabilidad de que el partido se lleve a cabo un miércoles es

   (a) $\frac{2}{13}$
   (b) $\frac{3}{13}$
   (c) $\frac{4}{13}$
   (d) $\frac{9}{13}$

Solución

Respuesta correcta: opción b.

Como se puede observar, en la cancha cuentan con 13 horarios diferentes para llevar a cabo el partido, de los cuales 3 son el día miércoles.

Por lo que la probabilidad de que la final se lleve cabo miércoles es de $P(a) = \frac{3}{13}$

4. Tres líneas de autobuses que siguen rutas diferentes pasan por el centro comercial cada 12, 15 y 18 minutos. Si los tres estuvieron a las 2:00 p.m. en el centro comercial, ¿a qué hora se vuelven a encontrar nuevamente?

    (a) 3:00 pm
    (b) 5:00 pm
    (c) 7:00 pm
    (d) 9:00 pm

Solución

Respuesta correcta: opción b.

Se debe determinar cada cuánto se encuentran los buses en el centro comercial. Para esto se calcula el mínimo común múltiplo de 12, 15 y 18, el cual es 180. Esto quiere decir que pasan por el centro comercial cada 3 horas. Si los tres estuvieron a las 2:00 pm entonces se vuelven a encontrar nuevamente a las 5:00 pm.

5. Se quiere cercar un terreno rectangular que mide 28 metros de ancho por 36 de largo. Para ello se colocan postes situados a la misma distancia uno del otro. Si en cada una de las esquinas del terreno se coloca un poste, entonces el número mínimo de postes que se deben colocar es

    (a) 8
    (b) 16
    (c) 32
    (d) 34

Solución

Respuesta correcta: opción c.

Para determinar la distancia en que se deben ubicar los postes calculamos el máximo común divisor de 28 y 36 el cual es 4.Por lo tanto en cada lado del terreno que mide 36 metros hay que colocar 8 postes (sin contar los dos de las esquinas) y en cada lado que mide 28 hay que colocar 6 (sin contar los dos de las esquinas). En total hay que colocar $2 \cdot 8 + 2 \cdot 6 + 4 = 32$ postes.

6. ¿Cuántos números impares menores a 500 al ser divididos por 3, por 4 y por 5 dejan residuo 1?

   (a) 5
   (b) 8
   (c) 36
   (d) 60

   Solución

   Respuesta correcta: *Ninguna*

   Si al dividir un número impar por 3, 4 y 5 deja residuo 1, entonces su antecesor debe ser múltiplo de 3, 4 y 5. Dado que 3, 4 y 5 no tienen divisores en común entonces cualquier múltiplo común a ellos debe ser un múltiplo de $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$.
   Determinemos los múltiplos pares de 60 menores a 500. Estos son:0, 60, 120, 180, 240, 300, 360, 420, 481. Los sucesores de estos números son: 1, 61, 121, 181, 241, 301, 361, 421 y 481.

   En total hay 9 números que cumplen con la condición pedida.

7. Cinco veces el producto de la edad de un padre y su hijo es 2915. ¿Cuántos años es mayor el padre que el hijo?

   (a) 18
   (b) 26
   (c) 42
   (d) 53

   Solución

   Respuesta correcta: opción c.

   Al descomponer 2915 como el producto de números primos se obtiene $2915 = 5 \cdot 11 \cdot 53$. Por el teorema fundamental de la aritmética la descomposición descrita es única. Dado que cinco veces el producto de la edad del hijo y del padre es 2915 se tiene que la edad del hijo es 11 años y la del padre 53. Por lo tanto el padre es $53 - 11 = 42$ años mayor que el hijo.

8. Considere dos planos paralelos π_1 y π_2. Sean A, B, C, D cuatro puntos distintos en π_1 y E, F dos puntos distintos en π_2. La cantidad mínima de rectas distintas que quedan determinadas por dos de esos seis puntos es

   (a) 2
   (b) 4
   (c) 10
   (d) 12

   Solución

   Respuesta correcta: opción c.

   La menor cantidad de rectas se forman si A, B, C, D son colineales. se tendría así una sola recta en π_1 y una recta en π_2; además como los puntos son distintos, cada punto de π_1 con cada punto de π_2 determinará una recta distinta, es decir, 8 rectas más. Se tiene en total 10 rectas.

9. En un cuadrado $ABCD$, E y F son los puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$, respectivamente. Una proposición verdadera es

   (a) $m\angle BAE + m\angle EAF = m\angle BEF$
   (b) $\angle BAF \cong \angle AFD$
   (c) $m\angle EFC > m\angle AFD$
   (d) $\angle EAF \cong \angle AEB$

Solución

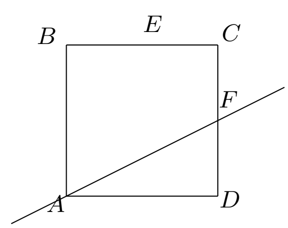
Respuesta correcta: opción b.

- Observe que $m\angle BAE + m\angle EAF = m\angle BAF < m\angle BAD = 90°$, mientras que $m\angle BEF > 90°$. Por tanto la opción a) es falsa.

- $\overleftrightarrow{AB} \| \overleftrightarrow{DC}$ y $\overleftrightarrow{AF}$ es transversal a ellas, por lo que $\angle BAF$ y $\angle AFD$ son alternos internos y son congruentes. Por tanto la opción b) es verdadera.

- Observe que $\triangle EFC$ es rectángulo isósceles, por lo que $m\angle EFC = 45°$, mientras que $\triangle ADF$ es rectángulo escaleno, y como $AD > DF$ se tiene que $m\angle AFD > m\angle DAF$, es decir, $m\angle AFD > 45°$. Por tanto la opción c) es falsa.

- Finalmente observe que $+\angle EAD \cong \angle AEB$ por ser anternos internos entre paralelas y $m\angle EAD = m\angle EAF + m\angle FAD = m\angle EAF + m\angle EAB$, pues $\angle EAB \cong \angle FAD$. Por lo tanto, $\angle EAD > \angle EAF$, es decir, $\angle AEB > \angle EAF$. Por tanto la opción d) es falsa.
  La única proposición verdadera es la opción b.



10. Un reloj de agujas atrasa 10 minutos cada hora, es decir, se coloca en la hora correcta a la una pero al ser las 2:00, marca la 1:50, al ser las 3:00, marca las 2:40.

    ¿Dentro de cuánto tiempo el reloj volverá a marcar la hora correcta?

   (a) un día
   (b) dos días
   (c) tres días
   (d) cuatro días

Solución

Respuesta correcta: opción c.

El reloj volverá a marcar la hora correcta cuando tenga exactamente 12 horas de atraso, es decir, 720 minutos. Si el reloj atrasa 10 minutos cada hora, necesitamos saber cuántas horas deben transcurrir para que atrase 12 horas.

Entonces $\frac{720}{10} = 72$, por lo que necesitamos que pasen 72 horas, lo que equivale a 3 días

11. A una reunión de capacitación a estudiantes llegaron 135, los cuales corresponden al 60 % de los estudiantes que se esperaba que llegaran. De estos que llegaron, el 20 % corresponde a estudiantes de zonas alejadas.

    Si del total de estudiantes que se esperaban, 54 eran de zonas alejadas, el porcentaje de estos que llegó a la capacitación es:

    (a) 20 %
    (b) 50 %
    (c) 30 %
    (d) 25 %

    Solución

    Respuesta correcta: opción b.

    Primero determinemos el total de estudiantes que se esperaban

$$\frac{x}{100} = \frac{135}{60} \Rightarrow x = 225$$

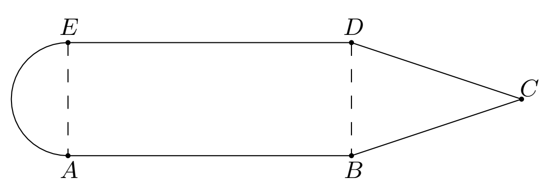
    Ahora, de los 135 que llegaron 20 % eran de zonas alejadas, lo cual corresponde a

$$\frac{135}{100} = \frac{x}{20} \Rightarrow x = 27$$

    Entonces podemos decir que llegaron 27 de los 54 estudiantes de zonas alejadas que se esperaban. Por lo cual el porcentaje de estudiantes de zonas alejadas que llegó a la capacitación corresponde a un 50 % de estos.

12. En la figura adjunta se presenta un triángulo, un rectángulo y una semicircunferencia. Si $BC = CD = 12$, el perímetro del $\triangle BCD$ es 30 y el área del $\square ABDE$ es 60, entonces el perímetro de la figura completa es

    (a) $44 + 2\pi$
    (b) $44 + 6\pi$
    (c) $62 + 3\pi$
    (d) $62 + 4\pi$



    Solución

    Respuesta correcta: *Ninguna.*

    Como se sabe que $BC = CD = 12$ y el perímetro del $\triangle BCD$ es 30, se obtiene que $BD = 6$. Entonces $ED = 10$, pues el área del $\square ABDE$ es 60. Tenemos además que el radio de la semicircunferencia es 3, por lo que su longitud es 3π.
    El perímetro total es $12 + 12 + 10 + 10 + 3\pi = 44 + 3\pi$

13. En el año de 1990 el gobierno de Australia decidió sembrar mil millones de árboles en una década. Si se sembraron esa cantidad de árboles en los diez años, entonces el número aproximado de árboles que se sembraron por segundo es

    (a) $0,3$
    (b) 3
    (c) 30
    (d) 300

    Solución

    Respuesta correcta: opción b.

    En un año se sembraron $\dfrac{1000000000}{10} : \dfrac{10^9}{10} : 10^8$ árboles. Ahora, en un año hay $365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60$ segundos. Así, la cantidad aproximada de árboles sembrados por segundo es $\dfrac{10^8}{365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60} = \dfrac{10^8}{8760 \cdot 3600} = \dfrac{10^8}{876 \cdot 36 \cdot 10^3} \approx \dfrac{10^5}{875 \cdot 32} = \dfrac{10^5}{28000} = \dfrac{10^5}{28 \cdot 10^3} = \dfrac{10^2}{28} \approx 3$

14. En un laboratorio clínico han recolectado más de 40 muestras y menos de 50. Se quieren refrigerar en recipientes de modo que en cada uno haya la misma cantidad de muestras y que todos los recipientes queden completos. Cada recipiente debe contener al menos tres muestras. Si solo puede hacerse de tres maneras, la cantidad máxima de recipientes que se necesitan es

    (a) 15
    (b) 16
    (c) 22
    (d) 23

    Solución

    Respuesta correcta: *Ninguna.*

    Para resolver el ejercicio se debe encontrar un número mayor que 40 y menor que 50 que tenga exactamente tres divisores propios, es decir, sin tomar en cuenta el 1 y el mismo número. Por otra parte cada uno de los divisores propios debe ser mayor o igual a tres, esto porque el problema indica que cada recipiente debe contener al menos tres muestras. Analicemos cada número entero entre 41 y 49.

    - 41 es primo. Por lo tanto no tiene divisores propios.
    - 42 tiene seis divisores propios: 2, 3, 6, 7, 14 y 21.
    - 43 es primo. No tiene divisores propios.
    - 44 tiene cuatro divisores propios: 2, 4, 11 y 22.
    - 45 tiene cuatro divisores propios: 3, 5, 9 y 15.
    - 46 tiene dos divisores propios: 2 y 23.
    - 47 es primo. No tiene divisores propios.
    - 48 tiene ocho divisores propios: 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16 y 24.
    - 49 tiene un divisor propio.

Según la lista anterior únicamente el número 44 tiene tres divisores propios mayores o iguales a 3: 4, 11 y 22. Por lo que se podrían tomar 2 frascos de 22, 4 frascos de 11 u 11 frascos de 4, es decir, cumple con la condición de que sólo se puede hacer de tres maneras (no se puede tomar 22 frascos de 2 muestras pues se indica que cada frasco debe tener al menos tres muestras). Por lo tanto la cantidad máxima de recipientes que se necesitan es de 11 en el que cada uno contiene cuatro muestras.

15. En la siguiente secuencia A1G2A1A1G2A1A1G2A1A1G..., la letra o el número que se encuentra en la posición 2015 es

    (a) A
    (b) G
    (c) 1
    (d) 2

Solución

Respuesta correcta: opción a.

Observe que en la secuencia dada existe un período de 6 elementos: A1G2A1 por lo que al dividir 2015 por 6 se obtiene cociente 335 y residuo cinco. Por lo tanto la letra que se encuentra en la posición 2015 es la quinta del período, es decir, la letra A.

16. Si la suma de tres números primos menores que 100 es 118, entonces uno de los números es

    (a) 2
    (b) 31
    (c) 61
    (d) 83

Solución

Respuesta correcta: opción a.

Dado que todos los números primos, excepto el 2, son impares debe suceder que uno de los tres números primos sea par, esto para que su suma sea par. Si por el contrario los tres fuesen impares su suma no sería par, ya que la suma de tres números impares es impar. De acuerdo con lo anterior con certeza uno de los números debe ser 2. Los otros dos son 37 y 79.

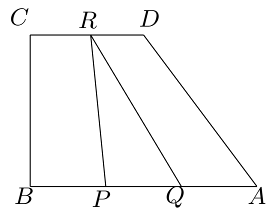
17. Considere que $\square ABCD$ es un trapecio rectángulo con base mayor $\overline{AB}$, recto en B, cuya base menor mide la mitad de la base mayor. Sean P y Q puntos en $\overline{AB}$ tales que $BP = PQ = QA$ y R en $\overline{CD}$. Se puede afirmar que $\dfrac{(ABCD)}{(PQR)}$ es

    (a) $\dfrac{9}{4}$
    (b) $\dfrac{1}{4}$
    (c) $\dfrac{10}{3}$

(d) $\dfrac{9}{2}$

Solución

Respuesta correcta: opción d.



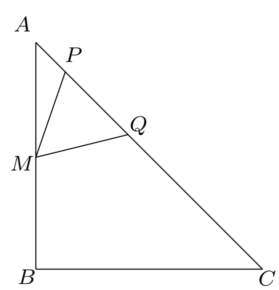
Como $BP = PQ = QA$, se tiene que $AB = 3PQ$. Llamemos $PQ = b$, por lo que $AB = 3b$ y $CD = \frac{3b}{2}$, además llamemos h a la altura del trapecio.
Entonces
$(ABCD) = \dfrac{(3b + \frac{3b}{2})h}{2} = \dfrac{9bh}{4}$ y $(PQR) = \dfrac{bh}{2}$
Por lo que
$\dfrac{(ABCD)}{(PQR)} = \dfrac{9bh}{4} \div \dfrac{bh}{2} = \dfrac{9}{2}$

18. Considere un triángulo rectángulo isósceles $\triangle ABC$ recto en B. Si se toma un punto M en $\overline{AB}$ y puntos P y Q en $\overline{AC}$ de forma que $A-P-Q-C$ y $\triangle MPQ$ es equilátero, entonces $m\angle BMQ$ es

(a) $75°$
(b) $90°$
(c) $105°$
(d) $120°$

Solución

Respuesta correcta: opción c.



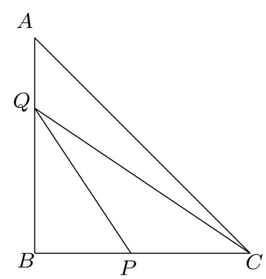
Como $\triangle ABC$ es rectángulo isósceles recto en B se tiene que $m\angle BAC = 45°$.
Como $\triangle MPQ$ es equilátero, $m\angle MPQ = 60°$ por lo que $m\angle MPA = 120°$.
Entonces, en $\triangle AMP$, por el teorema de la suma de las medidas de los ángulos internos del triángulo, se tiene que $m\angle AMP = 15°$. Por lo tanto $m\angle AMQ = 75°$
Finalmente $m\angle BMQ = 180° - m\angle AMQ = 180° - 75° = 105°$

19. Considere un triángulo rectángulo $\triangle ABC$, recto en B. Si P es el punto medio de $\overline{BC}$ y Q es un punto en $\overline{AB}$ tal que $BQ = 2AQ$, entonces $\dfrac{(AQC)}{(PQC)}$ es

(a) $\dfrac{1}{2}$
(b) 1
(c) 2
(d) $\dfrac{2}{3}$

Solución

Respuesta correcta: opción b.



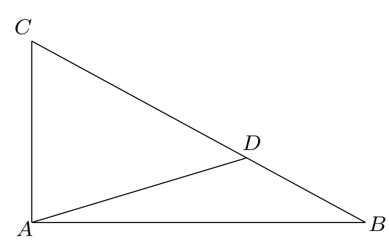
Llámese $AQ = b, PC = a$, por lo que $BQ = 2b$ y $BC = 2a$.
En $\triangle AQC$, tomando $\overline{AQ}$ como la base, se tiene $(AQC) = \dfrac{b \cdot 2a}{2} = ab$.
En $\triangle PQC$, tomando $\overline{PC}$ como la base, se tiene $(PQC) = \dfrac{a \cdot 2b}{2} = ab$.
Por lo tanto $\dfrac{(AQC)}{(PQC)} = \dfrac{ab}{ab} = 1$

20. Considere el triángulo rectángulo $\triangle ABC$ recto en A tal que $AB = 2AC$. Si D es un punto en $\overline{BC}$ tal que $DC = 2BD$, entonces el mayor de los siguientes ángulos agudos es

(a) $\angle DAC$
(b) $\angle ACB$
(c) $\angle ADC$
(d) $\angle ABD$

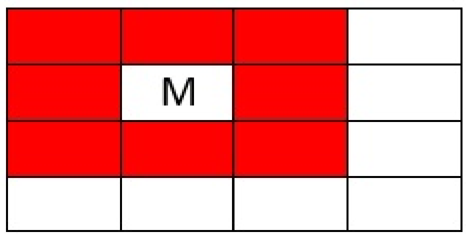
Solución

Respuesta correcta: opción a.



Se sabe que $AB > AC$, por lo que $\angle ACB > \angle ABC$.
También se sabe que $BC > AB = 2AC$, por lo que $\dfrac{BC}{2} > AC$, y como $DC > \dfrac{BC}{2}$ entonces $DC > AC$, por lo que $\angle DAC > \angle ADC$
Finalmente $\angle DAC > \angle ACB$. Observe que si D fuese el punto medio de $\overline{BC}$, entonces $\triangle ADC$ sería isósceles, pero como $DC > \dfrac{BC}{2}$ entonces $\angle DAC > \angle ACB$.

21. En un grupo de 16 estudiantes, los nombres de estos son Juan, María, Laura, Andrea, Javier, Marta, Leonel, Aarón, Jesús, Mónica, Lorna, Alejandra, Josué, Mariam, Luis y Adrián. Se desea sentarlos en cuatro filas y cuatro columnas, de forma que ningún estudiante tenga a su alrededor a alguien con la misma inicial de su nombre. Por ejemplo, si un estudiante cuyo nombre inicia con M se sienta en una posición como en la figura, entonces ningún otro estudiante con la misma inicial se puede sentar en las posiciones sombreadas



Se sabe que 4 alumnos tienen espacio fijo en la primera fila, comenzando de izquierda a derecha con Josué, seguido de María, Lorna y Adrián. Un posible acomodo para la última fila del aula es:

(a) Luis, Mónica, Andrea, Jesús
(b) Luis, Jesús, Aarón, Marta
(c) Juan, Mariam, Laura, Andrea
(d) Leonel, Alejandra, Javier, Mónica

Solución

Respuesta correcta: opción d.

Denotemos F_iC_j la casilla que está en la fila i y columna j. Se tiene entonces

F_4C_1	F_4C_2	F_4C_3	F_4C_4
F_3C_1	F_3C_2	F_3C_3	F_3C_4
F_2C_1	F_2C_2	F_2C_3	F_2C_4
Josué	María	Lorna	Adrián

Para cumplir las condiciones del enunciado, en cada fila y en cada columna no puede haber dos personas con la misma inicial.

Entonces en la fila 2, la persona que tiene inicial M debe estar en la posición F_2C_4 y quien tiene inicial L debe estar en la posición F_2C_1. Esto obliga a quien tiene inicial J a colocarse en F_2C_3 y en F_2C_2 tiene que sentarse alguien con inicial A.

F_4C_1	F_4C_2	F_4C_3	F_4C_4
F_3C_1	F_3C_2	F_3C_3	F_3C_4
L	A	J	M
Josué	María	Lorna	Adrián

Siguiendo el mismo razonamiento, en la tercera fila se debe tener J, M, L, A y entonces en la cuarta fila se debe tener L, A, J, M

L	A	J	M
J	M	L	A
L	A	J	M
Josué	María	Lorna	Adrián

Así que el posible orden para la última línea lo tiene la opción (d) Leonel, Alejandra, Javier, Mónica.

22. Si a y b son los dígitos de las unidades de millar y decenas, respectivamente, ¿cuántos posibles números de la forma $2a9b3$ son divisibles por 11?

    (a) 2
    (b) 4
    (c) 9
    (d) 10

Solución

Respuesta correcta: opción c.

Según las reglas de divisibilidad, un número es divisible por 11 si la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan lugar impar y la suma de las que ocupan lugar par es divisible por 11. En el número $2a9b3$ la suma de las cifras que ocupan lugares impares es $3+9+2=14$ y la suma de las que ocupan lugares pares es $b+a$.
La diferencia de la suma de las cifras que ocupan lugares impares y la suma de las que ocupan lugares pares es $14-(a+b)$ la cual es múltiplo de 11 si y solo si $a+b=14$ o $a+b=3$. Recuerde que a y b solo puede tomar valores de 0 a 9 ya que corresponden a cifras del número dado. Así los posibles valores de a y b son:

Para el caso en que $a+b=14$

- $a=9$, $b=5$.
- $a=8$, $b=6$.
- $a=7$, $b=7$.
- $a=6$, $b=8$.
- $a=5$, $b=9$.

Para el caso en que $a + b = 3$

- $a = 0$, $b = 3$.
- $a = 1$, $b = 2$.
- $a = 2$, $b = 1$.
- $a = 3$, $b = 0$.

En total hay nueve posibles números de la forma $2a9b3$ que son divisibles por 11. Estos son: 29953, 28963, 27973, 26983, 25993, 20933, 21923, 22913 y 23903.

23. La cantidad de números menores que 1000 que son divisibles por 3 o por 7 es

    (a) 47
    (b) 100
    (c) 428
    (d) 475

Solución

Respuesta correcta: opción c

Podemos calcular la cantidad de múltiplos de 3 o 7 menores que 1000, esto porque los múltiplos de 3 o 7 son divisibles precisamente por 3 o 7. La cantidad de números menores que 1000 que son múltiplos de 3 es el cociente de la división $1000 \div 3$, es decir 333. De igual forma la cantidad de números menores que 1000 que son múltiplos de 7 es el cociente de $1000 \div 7$ el cual 142. Por otra parte debemos calcular los múltiplos de 3 y 7 a la vez, es decir, los múltiplos de 21, pues si sumamos los múltiplos de 3 y 7 se consideran dos veces los que son múltiplos de ambos a la vez. Los múltiplos de 21 son el cociente de $1000 \div 21$ que es 47. Así en total hay $333 + 142 - 47 = 428$ números menores que 1000 que son divisibles por 3 y 7 a la vez.

24. Dado un triángulo isósceles ABC con $\angle ABC \cong \angle ACB$, se tiene un punto D tal que $B - C - D$. Si $m\angle DAC = 2m\angle BAC + m\angle ABC$ entonces $m\angle ACB$ es

    (a) 18°
    (b) 36°
    (c) 45°
    (d) 72°

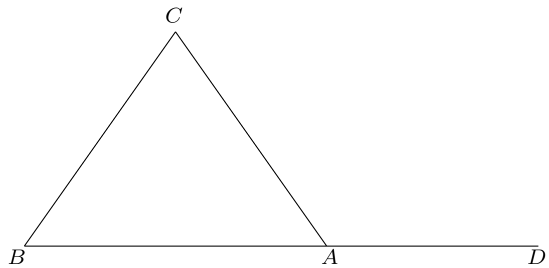
Solución

Respuesta correcta: *Ninguna*

Pregunta eliminada por error de digitación.

El enunciado correcto debe decir $B - A - D$, en lugar de $B - C - D$.

Con esta corrección la solución es la siguiente:



Por el Teorema de la medida del ángulo externo se sabe que $m\angle DAC = m\angle ABC + m\angle ACB$.
Entonces $2m\angle BAC + m\angle ABC = m\angle ABC + m\angle ACB$, de donde $m\angle ABC = 2m\angle BAC$.
Por la suma de las medidas de los ńagulos internos del triángulo se tiene

$$\begin{aligned} m\angle ABC + m\angle ACB + m\angle BAC = 180^\circ &\implies 2m\angle BAC + 2m\angle BAC + m\angle BAC = 180^\circ \\ &\implies 5m\angle BAC = 180^\circ \\ &\implies m\angle BAC = 36^\circ \end{aligned}$$

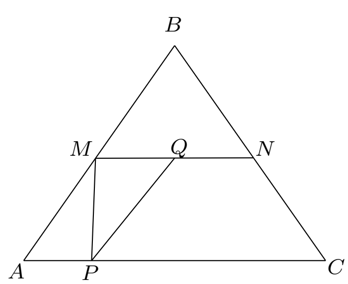
Finalmente $m\angle ACB = 72^\circ$

25. En el triángulo equilátero $\triangle ABC$, sean M y N los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. Sea P el pie de la perpendicular sobre $\overline{AC}$ desde M. Si se traza una recta paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ por P y llamamos Q al punto de intersección de esta recta con $\overline{MN}$, entonces $m\angle PQN$ es

    (a) 60°
    (b) 105°
    (c) 120°
    (d) 135°

Solución

Respuesta correcta: opción c.



En $\triangle AMP$, $m\angle MAP = 60^\circ, m\angle APM = 90^\circ$ por lo que $m\angle AMP = 30^\circ$.
Por otra parte $\overleftrightarrow{AM} \parallel \overleftrightarrow{PQ}$, por lo que $\angle AMP \cong \angle MPQ$ por ser alternos internos entre paralelas.
Entonces $m\angle MPQ = 30^\circ$. Además $m\angle PMQ = 90^\circ$
Entonces, por el teorema de la medida del ángulo externo,
$m\angle PQN = m\angle PMQ + m\angle MPQ = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$