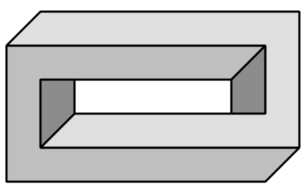
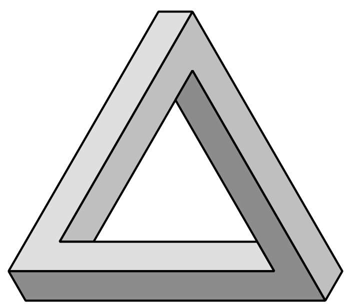
XXX OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICAS

MEP - UNA - UCR - MICITT - UNED - TEC

SOLUCIÓN
PRIMERA ELIMINATORIA NACIONAL





Nivel I
(7°)

2018

Estimado estudiante:

La Comisión de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas 2018 le saluda y le da la más cordial bienvenida a la Primera Eliminatoria Nacional de estas justas académicas, deseándole los mayores éxitos.
La prueba consta de un total de 25 preguntas de selección única.

Puede consultar la lista de estudiantes clasificados a partir del viernes 6 de julio, en la siguiente dirección electrónica:

www.olcoma.com

INDICACIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en la hoja de respuestas que se le ha entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no necesariamente están hechos a escala.
- El formulario de preguntas es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- No se permite el uso de hojas adicionales.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en la hoja de respuestas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A yB	$\angle ABC \approx \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre los puntos P y R

1. Una bolsa de papel contiene 22 bolas iguales, excepto que dos de ellas son rojas, tres azules, diez blancas, cuatro verdes y tres negras. Las bolas son extraídas de la bolsa al azar y sin devolverlas. La cantidad mínima de bolas que deben extraerse para obtener dos del mismo color es

   (a) 4

   (b) 5

   (c) 6

   (d) 9

- Opción correcta: (c)
- Solución:

  No importa tanto el número de bolas de cada color, sino que haya al menos 2.

  Como son 5 colores diferentes, se necesitan sacar al menos 6 (principio del palomar) para asegurar que al menos dos bolas son del mismo color.

2. La suma de los dígitos del mayor divisor del número $n = 1\,223\,334\,444$, distinto de n, es

   (a) 32
   (b) 33
   (c) 34
   (d) 35

- Opción correcta: (b)
- Solución:

  Como el número es par, se tiene que $n = 2 \cdot k$, con $k = n \div 2$ divisor de n.

  Como se pide el mayor divisor distinto del número original, este es precisamente $k = n \div 2 = 611667222$, cuyas cifras suman 33.

3. Considere el $\triangle ABC$ isósceles y acutángulo, tal que $AC = BC$. Si $A - M - C$, con $AM = AB$, y $m\angle ACB = 40°$, entonces $m\angle MBC$ es

   (a) $15°$

   (b) $40°$

   (c) $55°$

   (d) $70°$

- Opción correcta: (a)
- Solución:

  Como $\triangle ABC$ isósceles y acutángulo y $m\angle ACB = 40°$, entonces $m\angle ABC = m\angle BAC = 70°$.

  Por otro lado se tiene que $A - M - C$ con $AM = AB$, entonces el $\triangle ABM$ es isósceles.

  Se sabe que $m\angle BAM = 70°$, entonces $m\angle AMB = m\angle ABM = 55°$. Como $m\angle ABC = m\angle ABM + m\angle MBC$, $70° = 55° + m\angle MBC$ se tiene que $m\angle MBC = 15°$.

4. En el siguiente tablero 4×4 se escribió en cada casilla una operación, de manera que en cada fila y en cada columna los resultados contienen cada número del 1 al 4. Sin embargo, se borraron algunas casillas; la operación que podría estar en la esquina inferior derecha es

   (a) $9 - 8$

   (b) $6 \div 3$

   (c) 1×4

   (d) $2 + 1$

1×1		1×3	
2×2	$6 - 3$		$6 - 5$
$4 - 1$	$1 + 3$	$8 - 7$	
$9 - 7$	$2 - 1$		?

- Opción correcta: (d)
- Solución:

  Resolviendo las operaciones que quedan, se obtiene:

1		3	
4	3		1
3	4	1	
2	1		

  El único número faltante de la segunda columna es 2, y por lo tanto, el último número en la primera fila es 4. Además, el único número faltante en la tercera fila es también 2, por lo que esto colocaría en la última columna los números 2 y 4 (y el 1 ya presente).

  Por lo tanto, el único número faltante en la última columna es 3, y la única opción que corresponde a dicho resultado es (c), $2 + 1$.

5. Si seis trabajadores construyen un muro en 10 días, con una jornada de ocho horas diarias, entonces la cantidad de trabajadores que se necesita para construir un muro igual al anterior, pero en cinco días con jornadas de cuatro horas diarias, corresponde a

   (a) 6

   (b) 12

   (c) 24

   (d) 32

- Opción correcta: (c)
- Solución:

  La cantidad total de horas trabajadas es $6 \times 10 \times 8 = 480$. En el segundo caso debe ocuparse la misma cantidad de horas, pues es el mismo muro. Si a es la cantidad de trabajadores, entonces $a \times 5 \times 4 = 480$, es decir, $a = 24$.

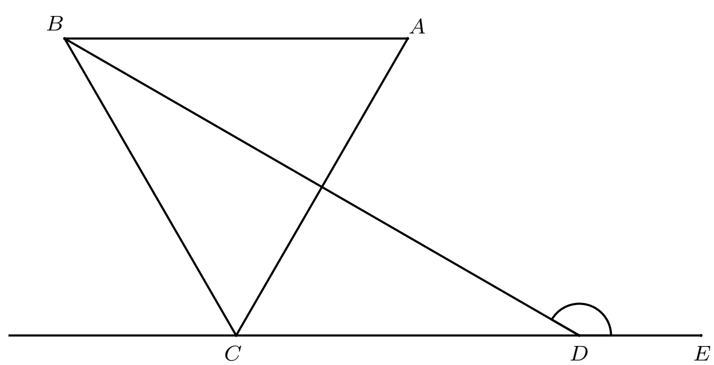
6. En la figura adjunta, el $\triangle ABC$ es equilátero, D está en $\overleftrightarrow{CE}$, $\overline{AB} \parallel \overleftrightarrow{CE}$ y $\overline{DB}$ divide al $\angle CBA$ en dos ángulos de igual medida. Con certeza, $m\angle BDE$ es

   (a) $4 \cdot m\angle ABD$

   (b) $5 \cdot m\angle ABD$

   (c) $m\angle BCA + m\angle ACD$

   (d) $m\angle BCA + m\angle CBD$



- Opción correcta: (b)
- Solución:

  Como el triángulo ABC es equilátero, cada uno de sus ángulos internos mide $60°$. $\overline{BD}$ biseca al $\angle CBA$ y $\overline{BA} \parallel \overline{CD}$, así que $m\angle ABD = 30° = m\angle BDC$

  Luego, $m\angle BDE = 150° = 5 \cdot 30° = 5 \cdot m\angle ABD$

7. Hoy es sábado y Ricardo inicia la lectura de un libro de 200 páginas. Ricardo solo puede leer seis páginas cada día, excepto los sábados que puede leer 25 páginas. La cantidad mínima de días que le tomará a Ricardo leer el libro completamente es

   (a) 22

   (b) 23

   (c) 24

   (d) 25

- Opción correcta: (a)
- Solución:

  El sábado lee 25 páginas, los siguientes 6 días lee 36 páginas, es decir cada 7 días lee 61 páginas; luego, en 21 días lee 183 páginas, el día 22 que será sábado puede leer hasta 25 páginas más, pero solo le restan 17 páginas del libro.

8. Considere el triángulo isósceles $\triangle ABC$, con $AB = AC$. Si M es un punto sobre $\overline{BC}$, tal que $\overline{AM} \perp \overline{BC}$, entonces $m\angle MAB + m\angle BCA$ es

   (a) $120°$

   (b) $90°$

   (c) $60°$

   (d) $45°$

- Opción correcta: (b)
- Solución:

  $m\angle ABC = m\angle BCA$ puesto que $\triangle ABC$ es isósceles, luego $\overline{AM} \perp \overline{BC}$ entonces los triángulos $\triangle AMB$ y $\triangle AMC$ son triángulos rectángulos.

  Así, $m\angle MAB + m\angle ABC = 90$, luego $m\angle MAB + m\angle BCA = 90°$.

9. Si se sabe que $\dfrac{x}{y} = \dfrac{6}{5}$ y que $\dfrac{y}{z} = \dfrac{4}{5}$, se puede asegurar que el valor numérico de $\dfrac{x^2 z}{y^3}$ es

   (a) $\dfrac{216}{125}$

   (b) $\dfrac{144}{125}$

   (c) $\dfrac{9}{5}$

   (d) 9

- Opción correcta: (c)
- Solución:

  Dado que $\dfrac{y}{z} = \dfrac{4}{5}$ entonces $\dfrac{z}{y} = \dfrac{5}{4}$, luego $\dfrac{x}{y} \cdot \dfrac{z}{y} \cdot \dfrac{x}{y} = \dfrac{x^2 z}{y^3} = \dfrac{6}{5} \cdot \dfrac{5}{4} \cdot \dfrac{6}{5} = \dfrac{36}{20} = \dfrac{9}{5}$.

10. El collar que se muestra en la figura adjunta contiene perlas oscuras y perlas claras. Carlos toma una perla tras otra del collar, siempre de alguno de los dos extremos. Si se detiene tan pronto toma la quinta perla oscura, el mayor número de perlas claras que pudo tomar Carlos es

   (a) 4

   (b) 5

   (c) 6

   (d) 7

- Opción correcta: (d)
- Solución: Toma 6 perlas del lado izquierdo (lleva dos oscuras y 4 claras) y 6 perlas del lado derecho (tres oscuras y tres claras), para un total de siete perlas claras.

11. En una finca se tienen tres cerdos, seis gallinas y cierto número de vacas. Si se contaron 44 patas entre todos los animales, el número de vacas de la finca es

    (a) 6

    (b) 5

    (c) 4

    (d) 3

- Opción correcta: (b)
- Solución:

  Nótese que seis gallinas tienen en total 12 patas y tres cerdos también tienen 12 patas, para un total de 24.

  Eso quiere decir que hay 20 patas entre todas las vacas, cada una tiene cuatro patas, por lo que debe haber 5 vacas.

12. Cuando el entero positivo x se divide por 5, el residuo es 2. El residuo cuando $3x$ se divide por 5 es

    (a) 1

    (b) 2

    (c) 3

    (d) 5

- Opción correcta: (a)
- Solución:

  Por el algoritmo de la división se tiene que $x = 5c + 2$, donde c es el cociente; ahora bien, si se multiplica por tres se obtiene $3x = 3(5c + 2) = 15c + 6 = 15c + 5 + 1 = 5(3c + 1) + 1$, haciendo $k = 3c + 1$ se tiene que $3x = 5k + 1$, por lo tanto el residuo es 1.

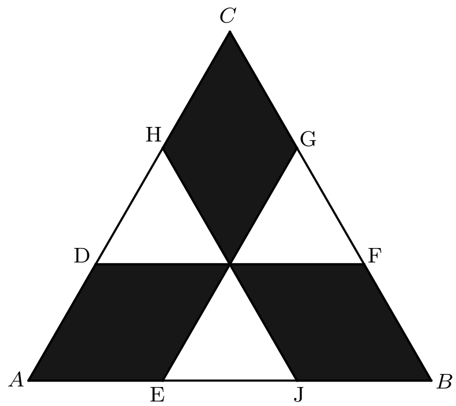
13. En la figura adjunta, el $\triangle ABC$ es equilátero y su área es 18. Además, los puntos G y F, E y J, así como D y H dividen, respectivamente, a los segmentos $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ en tres segmentos de igual medida. El área de la región sombreada es

    (a) 6

    (b) 9

    (c) 12

    (d) 16



- Opción correcta: (c)
- Solución:

    Se obtiene el área de los triángulos no sombreados: cada triángulo blanco tiene como base la tercera parte de la base del $\triangle ABC$ y como altura la tercera parte de la altura del $\triangle ABC$, por lo que al área de cada uno de estos triángulos corresponde a $\dfrac{1}{9}$ del área del $\triangle ABC = \dfrac{1}{9} \cdot 18 = 2$.

    Como son tres triángulos sin sombrear, el área de esa región no sombreada es 6.

    Por lo tanto, el área de la región sombreada es $18 - 6 = 12$.

14. La diferencia entre 120 % de 30 y 130 % de 20 es

    (a) 0

    (b) 5

    (c) 8

    (d) 10

- Opción correcta: (d)
- Solución:

    El120 % de 30 es 120*30/100 =36.

    130 % de 20 es 130*20/100 =26.

    $36 - 26 = 10$ es la diferencia.

15. Se escriben los números enteros positivos desde el uno hasta el 2018, uno a continuación del otro, sin espacios intermedios, formando una larga secuencia de dígitos:

$$12345678910111213\ldots201620172018$$

La cantidad de dígitos que se escriben antes de que se escriban tres 8 seguidos es

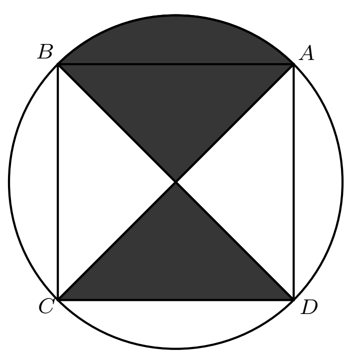
(a) 164
(b) 165
(c) 166
(d) 167

- Opción correcta: (d)
- Solución:

La primera vez que aparecen tres 8 seguidos, ocurre al escribir 88 y 89. Se debe contar entonces la cantidad total de dígitos al escribir los números del 1 al 87. Del 1 al 9 hay 9 dígitos. Del 10 al 88 hay $79 \cdot 2 = 158$ dígitos. En total hay 167 dígitos.

16. En la figura adjunta, $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son diámetros del círculo de área p; además, $\square ABCD$ es un cuadrado de área q. Si ambas áreas están dadas en metros cuadrados, el área de la región sombreada, en metros cuadrados, es

(a) $\dfrac{p}{2} + \dfrac{q}{2}$
(b) $\dfrac{p}{2} + \dfrac{q}{3}$
(c) $\dfrac{p}{4} + \dfrac{q}{3}$
(d) $\dfrac{p}{4} + \dfrac{q}{4}$



- Opción correcta: (d)
- Solución:

Note que p es mayor que q. Además, $p+q$, por ejemplo, sería sumar las áreas de las dos figuras (como si estuvieran separadas).

Si O es el punto de intersección de los diámetros, entonces $(COD) = \dfrac{(ABCD)}{4}$ y el área del sector circular restante es la cuarta parte del área del círculo.

Por lo tanto, el área de la regióm sombreada es $\dfrac{p+q}{4}$

17. Para las pasadas fiestas de Palmares se estima que asistieron cuatro mujeres por cada tres hombres, tres niñas por cada cuatro niños y un niño por cada tres hombres. La razón de mujeres a niñas que asistieron a dichas fiestas es

    (a) $1 : 4$

    (b) $2 : 3$

    (c) $4 : 3$

    (d) $16 : 3$

- Opción correcta: (d)
- Solución:

  Sean M = mujeres, H = hombres, N_a = niñas y N_o = niños. Las razones propuestas en el ejercicio son $\dfrac{M}{H} = \dfrac{4}{3}$, $\dfrac{N_a}{N_o} = \dfrac{3}{4}$, $\dfrac{N_o}{H} = \dfrac{1}{3}$

  Lo que significa que:

  $$\frac{N_a}{N_o} \cdot \frac{N_o}{H} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4} \text{ entonces } \frac{N_a}{H} = \frac{1}{4}$$

  $$\frac{M}{H} \cdot \frac{H}{N_a} = \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{1} = \frac{16}{3} \text{ entonces } \frac{M}{N_a} = \frac{16}{3}$$

18. Al dividir 2018 por un número desconocido obtenemos residuo 143, entonces es verdadero que el producto del cociente por el divisor es

    (a) par

    (b) primo

    (c) múltiplo de 3

    (d) múltiplo de 11

- Opción correcta: (c)
- Solución:

  Sea p el divisor y q el cociente entonces por el algoritmo de la división tenemos:

  $$2018 = p \cdot q + 143 \Rightarrow 2018 - 143 = p \cdot q \Rightarrow 1875 = p \cdot q$$

  $\therefore$ el producto del cociente por el divisor es múltiplo de 3.

19. Carlos y María empiezan a correr alrededor de una pista de entrenamiento al mismo tiempo y cada uno de ellos corre con una rapidez constante: Carlos corre siete vueltas en 15 minutos, mientras que María cinco vueltas en 12 minutos. Cuando ambos llegaron juntos a la meta por primera vez, Carlos observó que había pasado una cantidad entera de minutos. El total de vueltas que dio Carlos en la pista de entrenamiento cuando llegaron a la meta juntos por primera vez es

    (a) 25

    (b) 28

    (c) 30

    (d) 60

- Opción correcta: (b)

- Solución:

  Se procede a calcular el $m.c.m(15, 12) = 60$. Entonces Carlos y María llegaron juntos por primera vez a la meta, después de 60 minutos. Entonces Carlos en 60 minutos corre 28 vueltas en la autopista.

20. Una caja contiene únicamente monedas y anillos; ambos objetos están hechos de oro o de plata. Se sabe, además, que 20 % de estos objetos en la caja son anillos y 40 % de las monedas son de plata. Si en la caja hay exactamente 156 monedas de oro, entonces la cantidad de anillos en la caja es

    (a) 65

    (b) 82

    (c) 104

    (d) 169

- Opción correcta: (a)

- Solución:

  Como 20 % de los objetos son anillos, 80 % serán monedas, de las cuales 40 % son de plata, por tanto 60 % de las monedas son de oro.

  Es decir, que 60 % de 80 % (que corresponde a $0{,}60 \cdot 80\,\% = 48\,\%$) de los objetos son monedas de oro.

  Entonces 48 % del total es igual 156, lo que implica que en total hay 325 objetos. Finalmente, $20\,\% \cdot 325 = 65$.

21. En una caja hay seis bolas blancas, 16 bolas rojas y el resto son bolas azules. Todas las bolas son del mismo peso, contextura y tamaño. Si la probabilidad de sacar de la caja (al azar) un bola blanca es de 0,15, entonces la probabilidad de sacar una bola azul es

    (a) 0,40

    (b) 0,45

    (c) 0,50

    (d) 0,75

- Opción correcta: (b)
- Solución:

  Como $P(Blanca) = 0,15 = \frac{15}{100} = \frac{3}{20} = \frac{6}{40}$, significa que hay 40 bolas en total.

  Además, como hay 6 blancas y 16 rojas, entonces hay 18 azules.

  Por lo tanto, $P(Azul) = \frac{18}{40} = 0{,}45$.

22. Considere un punto M en el interior del $\triangle ABC$ y sea N un punto tal que $B - N - C$ y $A - M - N$. Con certeza se puede asegurar que

    (a) $AB + BC > AM + MC$

    (b) $AB + BC < AM + MC$

    (c) $2MB + MC + MN < 2BN + NC$

    (d) $NC + BN > MC + MB + 2MN$

- Opción correcta: (a)
- Solución:

  Al aplicar la desigualdad triangular al $\triangle ABN$ y $\triangle MNC$ se obtienen las siguientes desigualdades respectivamente $AB + BN > AN$ y $MN + NC > MC$ al sumar los respectivos lados de las desigualdades se obtiene $AB + BN + MN + NC > AN + MC$, pero $BC = BN + NC$ y $AN = AM + MN$, entonces $AB + BC > AM + MC$.

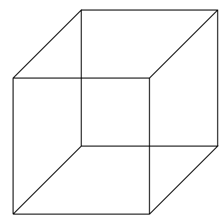
23. Considere un cubo como el que se muestra en la figura adjunta. La cantidad de triángulos tales que sus tres vértices son los vértices del cubo es

(a) 12

(b) 24

(c) 56

(d) 60



- Opción correcta: (c)
- Solución:

Si se escoge un vértice cualquiera entonces se puede formar un triángulo con cualquier otro par de vértices del triángulo, de los restantes 7 vértices hay 7 formas de escogerlo, y de los 6 que quedan, hay 6 formas, sin embargo, hay que dividir entre dos, pues cada par que se escoge se contó dos veces; esto da $\dfrac{7 \times 6}{2} = 21$ formas.

Por otro lado, el vértice inicial se puede escoger de 8 formas, pero, al igual que antes, cada triplete de vértices se cuenta 3 veces, entonces, la cantidad total de triángulos es $\dfrac{8 \times 21}{3} = 56$.

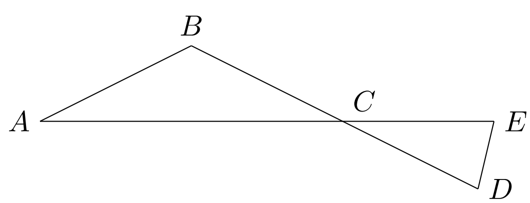
24. En la figura adjunta, C es el punto de intersección de $\overline{AE}$ y $\overline{BD}$, $AB = BC$ y $CE = CD$. Si $m\angle CED = 55°$, entonces $m\angle ABC$ es

(a) 40°

(b) 55°

(c) 70°

(d) 80°



- Opción correcta: (a)
- Solución:

Como $\triangle DCE$ es isósceles, entonces $\angle CED \cong \angle CDE$.

Luego $m\angle DCE = 180° - 55° - 55° = 70°$ y, por ser opuesto por el vértice al ángulo anterior, $m\angle BCA = 70°$.

Como $\triangle ABC$ es isósceles, $m\angle BCA = m\angle BAC = 70°$.

Por lo tanto, $m\angle ABC = 180° - 70° - 70° = 40°$.

25. Una cantidad par de personas decide bailar entre sí en una circunferencia. Cada persona baila con quien que se encuentra diametralmente opuesta a ella.
Si las personas están numeradas con 1, 2, 3, ... de manera consecutiva, y si se sabe que la persona que tiene el número 24 baila con la que tiene el número 73, entonces la cantidad de personas que se encuentran bailando es

    (a) 96

    (b) 98

    (c) 100

    (d) 102

- Opción correcta: (b)

- Solución:

  Si $2n$ es la cantidad total de personas, entonces la persona 1 baila con la $n+1$. Como la persona 24 baila con la 73, entonces se tiene que $n+1+23=73$; así, $n=49$ y la cantidad total de personas es 98.