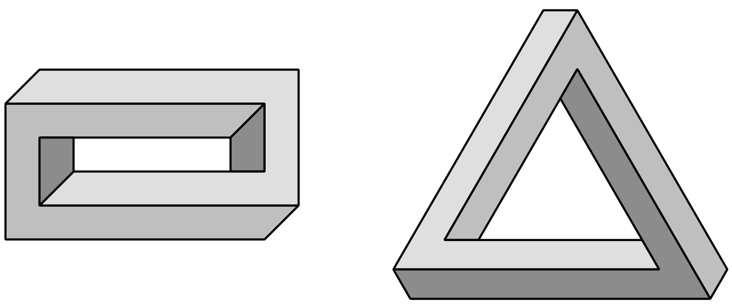
XXXII OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICAS

MEP - UNA - UCR - MICITT - UNED - TEC

SOLUCIÓN
PRIMERA ELIMINATORIA



Nivel I

(7°)

2020

Estimado estudiante:

La Comisión de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas 2020 le saluda y le da la más cordial bienvenida a la Primera Eliminatoria Nacional de estas justas académicas, deseándole los mayores éxitos.
La prueba consta de un total de 20 preguntas de selección única.

Puede consultar la lista de estudiantes clasificados a partir del XXX, en la siguiente dirección electrónica:

www.olcoma.com

INDICACIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en la hoja de respuestas que se le ha entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no necesariamente están hechos a escala.
- El formulario de preguntas es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- No se permite el uso de hojas adicionales.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en la hoja de respuestas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A yB	$\angle ABC \approx \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre los puntos P y R

1. La cantidad de números de dos dígitos que son cuadrados perfectos divisibles por 6 corresponde a
   (a) 1
   (b) 2
   (c) 3
   (d) 6

- Opción correcta: (a)
- Solución:

  Los cuadrados perfectos de dos dígitos son 16, 25, 36, 49, 64 y 81. Luego, para que sean divisibles por 6 deben ser divibles por 2 y por 3. De esta forma, el único número que cumple ambas condiciones es el 36.

2. Una microbióloga siembra una colonia de bacterias en dos recipientes A y B, pero el recipiente A tiene la cuarta parte de capacidad que el recipiente B. Las bacterias se duplican cada minuto que transcurre. Si al inicio del experimento, a las 9:00am, la microbióloga colocó una bacteria en cada recipiente y a las 9:12am el recipiente A está completamente lleno. ¿A qué hora se llenará el recipiente B?
   (a) $9:48$am
   (b) $9:36$am
   (c) $9:15$am
   (d) $9:14$am

- Opción correcta: (d)
- Solución: El recipiente B, a las 9:12am tiene la cuarta parte, un minuto después se duplica y estará a la mitad y otro minuto después estará lleno.

3. Karina tiene un frasco con sal. Cuando el frasco está lleno de sal, todo pesa 580 gramos. Cuando el contenido de sal está a la mitad, todo pesa 390 gramos. El peso, en gramos, del frasco vacío es
   (a) 190
   (b) 380
   (c) 400
   (d) 200

- Opción correcta: (d)
- Solución: La mitad de la sal pesa $580 - 390 = 190$ gramos. Por lo tanto el frasco pesa $390 - 190 = 200$ gramos.

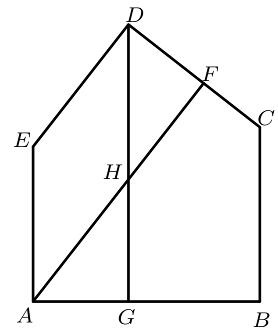
4. En la siguiente figura $m\angle EAB = m\angle ABC = m\angle CDE = 90°$, $\overline{AF} \parallel \overline{DE}$, $\overline{DG} \| \overline{BC}$ y H es el punto de intersección de $\overline{DG}$ con $\overline{AF}$. Si $m\angle AED = 142°$, la medida del $\angle DHF$ es

   (a) 52º

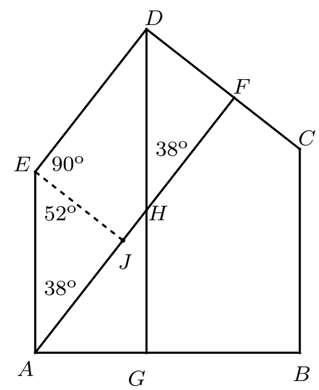
   (b) 38º

   (c) 32º

   (d) 26º



- Opción correcta: (b)
- Solución:



Si se traza una perpendicualr a $\overline{AF}$ desde E y se llama J al pie de dicha perpendicular, se tiene que $m\angle AEJ = 52º$. Luego $m\angle EAJ = 38º$. Finalmente, como $\overline{AF} \parallel \overline{DE}$, $\angle EAJ$ y $\angle DHF$ son congruentes por ser correspondientes entre paralelas. Por lo tanto $m\angle DHF = 38º$

5. Al inicio del estudio de cierto cultivo se determina que tiene 10 000 bacterias y aumenta 20 % cada hora. ¿Cuántas bacterias hay en el cultivo al término de 4 horas?

   (a) 12 000

   (b) 13 456

   (c) 18 000

   (d) 20 736

- Opción correcta: (d)
- Solución: De acuerdo con la información, se tiene que:

  Al final de la primera hora se tiene 12000 bacterias, pues el 20 % de 10000 es 2000. Al sumar $10000 + 2000$ se obtiene 12000 bacterias.

  Al final de la segunda hora se tiene 14400 bacterias, pues el 20 % de 12000 es 2400. Al sumar $12000 + 2400$ se obtiene 14400 bacterias.

  Al final de la tercera hora se tiene 17280 bacterias, pues el 20 % de 14400 es 2880. Al sumar $14400 + 2880$ se obtiene 17280 bacterias.

  Al final de la cuarta hora se tiene 20736 bacterias, pues el 20 % de 17280 es 3456. Al sumar $17280 + 3456$ se obtiene 20736 bacterias.

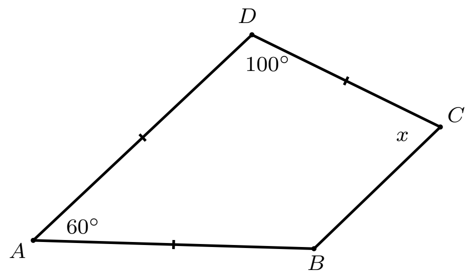
6. Considere un cuadrilátero $ABCD$, como se muestra en la figura. Si $AB = CD = AD$, $m\angle ADC = 100°$ y $m\angle DAB = 60°$, entonces la medida del ángulo x es

   (a) $30°$

   (b) $40°$

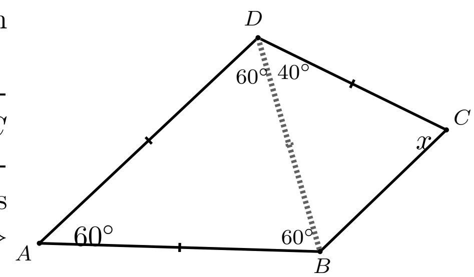
   (c) $60°$

   (d) $70°$



- Opción correcta: (d)

- Solución:
  Obseve que al trazar el segmento $\overline{BD}$ se obtiene un triángulo equilátero $\triangle ABD$, por lo que los ángulos $\angle ABD$ y $\angle BDA$ son congruentes y miden $60°$, por lo que se obtine $m\angle BDC = 40°$.
  Ahora observe que $BD = CD$, esto quiere decir que el triángulo $\triangle BCD$ es isósceles, por lo tanto los ángulos $\angle DBC$ y $\angle DCB$ deben tener igual medida, además debe cumplirse que $180° = 40° + m\angle DBC + m\angle DCB$, esto es $180° = 40° + m\angle DBC + x \Rightarrow 140° = m\angle DBC + x \Rightarrow 140° = 2x \Rightarrow x = 70°$.



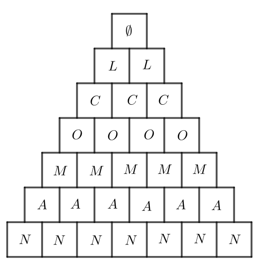
7. Considere las letras de la palabra $\emptyset LCOMAN$ dispuestas de manera triángular, como se muestra a continuación.
   Si se inicia desde el cuadrado superior, que contiene $\emptyset$, y se sigue un camino formado por cuadrados adyacentes (que compartan al menos una parte del lado) formando la palabra $\emptyset LCOMAN$, la cantidad de caminos diferentes que se pueden tomar es

   (a) 64

   (b) 128

   (c) 256

   (d) 5 040



- Opción correcta: (a)

- Solución: Observe que cada cuadrado tiene dos cuadrados adyacentes en la fila inferior a donde este está colocado. De este modo, desde la casilla superior hay dos posibles casillas a escoger con la letra L. Para cada una de ellas, a su vez, hay dos posibles casillas adyacentes que se pueden tomar con la letra C. Esto quiere decir que para llegar de $\emptyset$ a C hay 4 caminos distintos.
  En cada fila se agregan nuevamente dos posibilidades por cada una de las casillas de la fila anterior. De este modo, para llegar a O hay 8 formas, para llegar a M hay 16 formas, y siguiendo con el mismo razonamiento, para llegar a N hay 64 caminos diferentes.

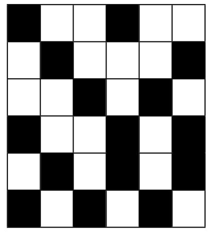
8. En la siguiente figura ¿cuántas celdas blancas deben pintarse de negro para que en cada fila y en cada columna haya exactamente una celda blanca?

   (a) 12

   (b) 15

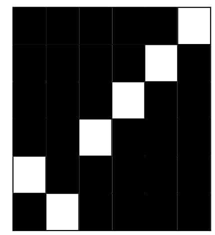
   (c) 16

   (d) 14

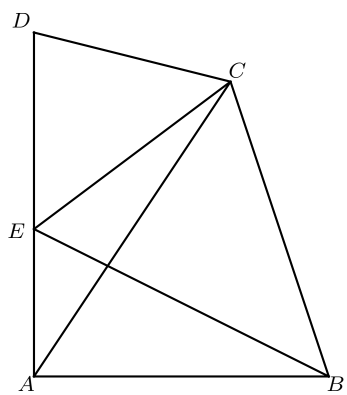


- Opción correcta: (b)
- Solución:

Al ser un cuadrado 6×6 entonces deben quedar 6 cuadros blancos. Se tienen 21 cuadros en blanco por lo tanto se deben pintar 15 de color negro. Una posible solución es la siguiente:



9. En la siguiente figura A, E y D son colineales, $AD = AC$, $DE = DC$, $BE = BC$ y $\overline{AC} \perp \overline{BE}$. Si $m\angle ADC = 72°$, la medida del $\angle CBE$ es



   (a) 18º

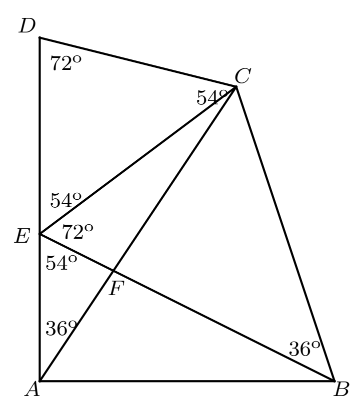
   (b) 24º

   (c) 36º

   (d) 42º

- Opción correcta: (c)
- Solución:

En el $\triangle ADC$, como $AD = AC$ entonces $m\angle ACD = m\angle ADC = 72^{o}$ y $m\angle DAC = 36^{o}$. Si llamamos F al punto de intersección de $\overline{AC}$ y $\overline{BE}$ tenemos que $m\angle AEF = 54^{o}$. En el $\triangle EDC$, como $DE = DC$ entonces $m\angle DEC = m\angle DCE = 54^{o}$. Luego $m\angle FEC = 72^{o}$. Finalmente, en el $\triangle BEC$, como $BE = BC$ entonces $m\angle BEC = m\angle BCE = 72^{o}$ y $m\angle CBE = 36^{o}$



10. En una escuela los estudiantes son de cuatro comunidades distintas A, B, C, y D. La mitad son de la comunidad B, una quinta parte es de D, los que son de C son la mitad de los estudiantes de B y 36 estudiantes son de A. ¿Cuántos estudiantes tiene la escuela?
    (a) 720
    (b) 740
    (c) 760
    (d) 800

- Opción correcta: (a)
- Como los estudiantes que son de C son la mitad de los estudiantes de B, entonces hay la cuarta parte que son de C, por lo tanto sumando las fracciones $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{19}{20}$ por lo tanto falta $\frac{1}{20}$ de la población que corresponde a los 36 de A. Por lo tanto la escuela tiene 720 estudiantes.

11. Un segmento de extremos A y B mide 28 cm. Entre A y B se ubican los puntos P, Q y R de tal manera que: $AP = \frac{1}{4}AB, AQ = \frac{5}{7}AB$ y $PR = \frac{1}{2}AB$. Según la información anterior, el orden de los puntos en el $\overline{AB}$ es
    (a) $APRQB$
    (b) $APQRB$
    (c) $ARPQB$
    (d) $AQPRB$

- Opción correcta: (b)
- Solución: Según la información anterior, se tiene que:
  $AP = 7$ cm, pues $\frac{1}{4}AB$ es 7 cm.
  $AQ = 20$ cm, pues $\frac{5}{7}AB$ es 20 cm.
  $PR = 14$ cm, pues $\frac{1}{2}AB$ es 14 cm.
  Observe que $AP + PR = 7 + 14 = 21$ cm. Se puede concluir que $A - P - Q - R - B$, es decir; que el orden de los puntos es $APQRB$

12. Carlos tiene siete cubos de diferentes tamaños. Cuando los acomoda desde el más pequeño hasta el más grande la diferencia entre la altura de cada dos cubos consecutivos es de 3 cm. El penúltimo cubo más grande es tan alto como una torre formada por los tres cubos más pequeños, uno sobre otro. ¿Cuál sería la altura de una torre formada por los siete cubos?
    (a) 18 cm
    (b) 70 cm
    (c) 84 cm
    (d) 100 cm

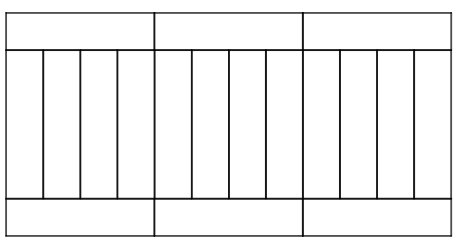
- Opción correcta: (c)
- Solución: Considere h la altura del cubo más pequeño. La altura de los cubos desde el más pequeño al más grande es la siguiente: $h, h+3, h+6, h+9, h+12, h+15, h+18$.

  Se tiene que el penúltimo cubo más grande es tan alto como una torre formada por los tres cubos más pequeños, se tiene la siguiente: $h+h+3+h+6 = h+15$, de donde se obtiene $h = 3$.

  La altura de la torres es $h+h+3+h+6+h+9+h+12+h+15+h+18 = 7 \cdot h + 63 = 7 \cdot 3 + 63 = 84$ cm.

13. El rectángulo grande de la figura adjunta está formado por 18 rectángulos idénticos. Si se sabe que cada uno de esos 18 rectángulos tiene perímetro igual a 15 cm, entonces el área del rectángulo grande, en centímetros cuadrados, corresponde a

    (a) 162
    (b) 54
    (c) 120
    (d) 270



- Opción correcta: (a)
- Solución:

  Considere uno de los 18 rectángulos y sea a la medida de su ancho y b la medida de su largo.

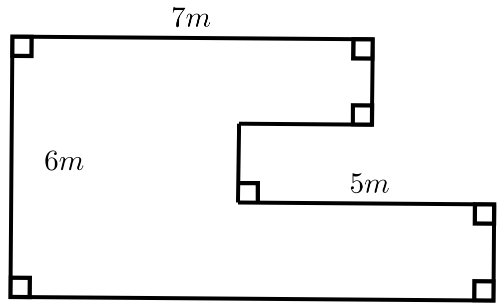
  Como el perímetro es 15, se tiene que $2a+2b = 15$; además, también se cumple que $b = 4a$, ya que el ancho de 12 rectángulos es equivalente a tres veces el largo.

  Así, $2a + 2b = 15 \Rightarrow 2a + 2(4a) = 15 \Rightarrow 10a = 15 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$. Por lo que $b = 6$.

  El rectángulo grande, tiene un lado que mide $3b = 3 \cdot 6 = 18$ y el otro lado mide $b + 2a = 6 + 3 = 9$.

  Por lo tanto, el área A del rectángulo grande es $A = 18 \cdot 9 = 162$.

14. De acuerdo con los datos de la figura adjunta, el perímetro de la figura es



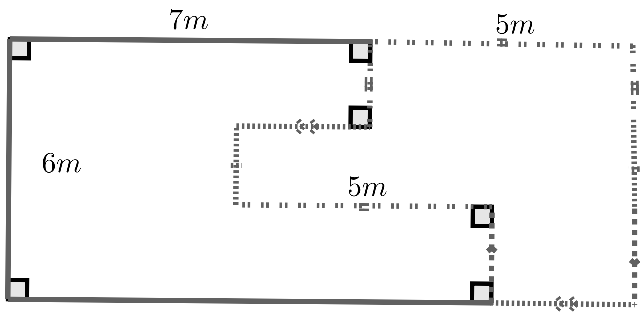
(a) 28m

(b) 30m

(c) 34m

(d) 36m

- Opción correcta: (d)
- Solución: Al trasladar unos cuantos segmentos, se obtiene una figura con el mismo perímetro, es decir $P = 2 \cdot 7 + 2 \cdot (5 + 6)) = 14 + 22 = 36$ metros.



15. En una empresa 5 trabajadores, trabajando al mismo tiempo, empacan 40 litros de alcohol en 12 minutos. ¿Cuánto tiempo tardarán en empacar 100 litros de alcohol 15 empleados trabajando al mismo tiempo.?

(a) 4 min

(b) 8 min

(c) 10 min

(d) 12 min

- Opción correcta: (c)
- Solución: Como 5 trabajadores empacan 40 litros de alcohol en 12 minutos entonces 1 empleado cada 12 minutos empaca 8 litros.
  Esto conlleva a que 1 empleado cada minuto empaca $\dfrac{2}{3}$ de litro.
  Luego por minuto, los 15 empleador empacan $\dfrac{2}{3} \cdot 15 = 10$ litros.
  Como son un total de 100 litros los que se deben empacar, estos 15 empleados durarán 10 minutos.

16. En una escuela de música se estudia piano y guitarra, 24 personas estudian piano, 19 estudian guitarra y 13 estudian ambos instrumentos. Si se elige un estudiante de forma aleatoria, ¿cuál es la probabilidad que estudie únicamente uno de los dos instrumentos?
    (a) $\frac{13}{30}$
    (b) $\frac{17}{30}$
    (c) $\frac{13}{43}$
    (d) $\frac{17}{43}$

- Opción correcta: (b)
- Solución: Sumando 24 que estudian piano y 19 que estudian guitarra, menos los 13 que estudian ambos instrumentos tenemos que hay 30 personas. De las cuales 11 $(24 - 13 = 11)$ únicamente estudian piano y 6 únicamente guitarra, por tanto hay 17 de 30 personas que estudia únicamente uno de los dos instrumentos.

17. En una urna hay bolas iguales excepto por el color. Hay bolas rojas, blancas y azules. Las azules son tantas como las rojas y las blancas juntas. Si se sustraen cuatro sétimas partes de las bolas en la urna y quedan 18 bolas, ¿cuál es la cantidad mínima de bolas azules que se sustrajeron?
    (a) 3
    (b) 4
    (c) 5
    (d) 2

- Opción correcta: (a)
- Solución: De la urna se sustrajeron cuatro sétimas partes entonces quedaron tres séptimas partes. Las tres séptimas partes equivalen a 18 bolas. Entonces, se deduce que una séptima parte equivale a seis bolas y siete séptimas partes equivalen a 42 bolas. Como se tiene que las bolas azules son tantas como las rojas y blancas entonces se deduce que las bolas azules es la mitad de las bolas, 21 bolas son azules. Por lo anterior, la cantidad mínima de bolas azules que se sustrajeron de la urna es $21 - 18 = 3$.

18. Sofía crea un vídeo de un concierto el día martes. Después de verlo terminado, se siente contenta del resultado, por lo que ese mismo día comparte su vídeo con ocho familiares. Si cada uno de los que reciben el vídeo observa el concierto y lo comparte al día siguiente con tres personas que no lo han visto, y que lo reciben únicamente por uno de sus contactos, entonces el primer día en que el vídeo ha sido visto por 105 personas es

    (a) Jueves

    (b) Viernes

    (c) Miércoles

    (d) Sábado

- Opción correcta: (a)
- Solución: El martes Sofía lo comparte con ocho personas (lo han visto 9 personas, pues Sofía lo vio también).

  El miércoles esas ocho personas lo comparten cada una con tres personas más (24 nuevas personas lo ven y en total al miércoles lo han visto 33).

  El jueves esas 24 personas lo comparten cada una con tres personas más (72 nuevas personas lo ven y en total al miércoles lo han visto 33+72=105).

  Así, desde el jueves el vídeo ha sido visto por 105 personas.

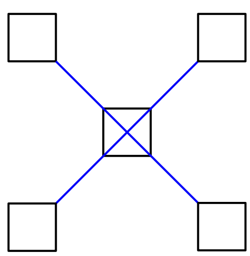
19. Si cada uno de los números 1, 2, 3, 4 y 5 son escritos una sola vez en cada uno de los cinco cuadrados de la figura adjunta, de manera que se obtienen sumas iguales a lo largo de cada una de las dos líneas, entonces con certeza el producto de todos los números que pueden ser escritos en el cuadrado del centro corresponde a

    (a) 15

    (b) 3

    (c) 5

    (d) 24



- Opción correcta: (a)
- Solución: Supongamos que x representa la suma en cada una de las dos líneas y que y es el número que se coloca en el cuadrado del centro.

  Dado que $1+2+3+4+5=15$, se cumple que $2x-y=15$, luego $y=2x-15$.

  La suma mínima de cada línea es $x=1+2+3=6$ y la suma máxima de cada línea es $x=3+4+5=12$; de esta manera, los posibles valores para y son $y=-3,-1,1,3,5,7,9$ y de esa lista solo $y=1$, $y=3$ y $y=5$ pueden ser colocados en el cuadrado del centro.

  Por lo tanto, el producto de los elementos que pueden ser colocados en el centro es $1\cdot 3\cdot 5=15$.

20. La cantidad de números de seis dígitos de la forma *aaabbb* que son múltiplos de 18 corresponde a
    (a) 12
    (b) 15
    (c) 21
    (d) 28

- Opción correcta: (b)
- Solución: Se puede observar que a no puede ser cero pues no se tendría un número de seis dígitos.

  Si se pretende que un número sea múltiplo de 18 entonces es múltiplo de dos, se deduce que b tiene que ser par. A la vez, el número también es múltiplo de nueve, por la regla de divisibilidad de nueve, se tiene que $3a + 3b$ es múltiplo de nueve, es lo mismo que $a + b$ sea múltiplo de tres.

  Se tiene los siguientes casos:

  Si $b = 0$ entonces a puede ser $3, 6, 9$.

  Si $b = 2$ entonces a puede ser $1, 4, 7$.

  Si $b = 4$ entonces a puede ser $2, 5, 8$.

  Si $b = 6$ entonces a puede ser $3, 6, 9$.

  Si $b = 8$ entonces a puede ser $1, 4, 7$.

  Por lo anterior, por cada caso se tienen tres números. Por lo tanto hay 15 números.