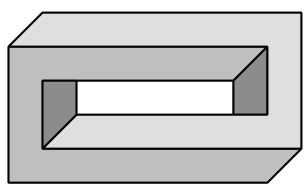
XXXIII OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICAS

MEP - UCR - TEC - UNA - UNED - MICITT

OLIMPIADAS COSTARRICENSES DE MATEMÁTICAS
OLCOMA

SOLUCIÓN
PRIMERA ELIMINATORIA NACIONAL



Nivel I
(7°)

2021

mep Ministerio de Educación Pública
TEC Tecnológico de Costa Rica
UNA UNIVERSIDAD NACIONAL COSTA RICA
UNED
micitt

Estimado estudiante:

La Comisión de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas 2021 le saluda y le da la más cordial bienvenida a la Primera Eliminatoria Nacional de estas justas académicas, deseándole los mayores éxitos.

La prueba consta de un total de 20 preguntas de selección única.

INDICACIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en la hoja de respuestas que se le ha entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no necesariamente están hechos a escala.
- El formulario de preguntas es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- No se permite el uso de hojas adicionales.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en la hoja de respuestas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A yB	$\angle ABC \approx \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre los puntos P y R

1. María y Carlos son dos hermanos que reciben una herencia. A María le corresponde las tres cuartas partes del total y a Carlos el resto. Si María gasta una quinta parte de lo que recibió, y de lo que le queda, le cede la mitad a Carlos, entonces finalmente la parte que recibió Carlos corresponde a

   (a) $\dfrac{9}{20}$

   (b) $\dfrac{21}{40}$

   (c) $\dfrac{11}{20}$

   (d) $\dfrac{27}{40}$

- Opción correcta: (c)
- Solución: María recibe $3/4$ partes del total, entonces Carlos recibe $1/4$ parte. Como María gasta una quinta parte del total, entonces le queda $3/4 - 3/20 = 3/5$ y al cederle la mitad a Carlos, este recibe en total $3/10 + 1/4 = 11/20$.

2. Una canasta contiene en total 200 bolas de hule o plástico, que pueden ser rojas o verdes. Si el 80 % de las bolas rojas son de hule y el porcentaje de bolas verdes es 45 %, entonces la cantidad de bolas rojas de plástico corresponde a

   (a) 22

   (b) 88

   (c) 72

   (d) 18

- Opción correcta: (a)
- Como el 45 % es de bolas verdes, entonces el total de bolas rojas es $200 \cdot 0{,}55 = 110$. Dado que el 80 % de las bolas rojas son de hule, entonces el total de bolas rojas de plástico es de $110 \cdot 0{,}20 = 22$.

3. Considere que $\square ABCD$ es un trapecio rectángulo, recto en B. Sea F un punto en $\overline{AB}$, tal que $A - F - B$. Además se tiene que: $\overline{CF} \perp \overline{DF}$, $AD = DF$ y $m\angle BCF = 45°$. La medida del ángulo ADF corresponde a

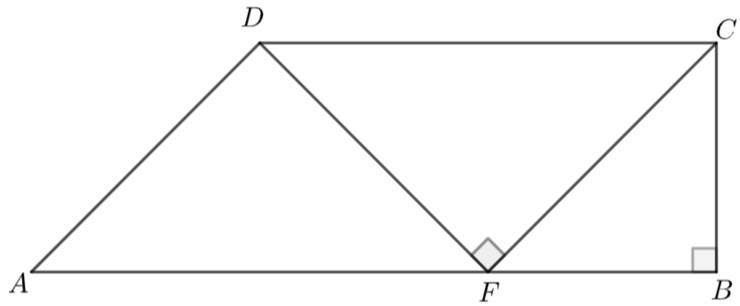
   (a) 35°

   (b) 45°

   (c) 90°

   (d) 100°

- Opción correcta: (c)
- Solución: De acuerdo con la información dada, se tiene la siguiente figura:



Se tiene que $m\angle FBC = 90°$ y $m\angle BCF = 45°$, por el teorema de la suma de las medidas de los ángulos internos de un tríangulo se obtiene que $m\angle CFB = 45°$.

Por otro lado, se tiene que $\overline{CF} \perp \overline{DF}$, entonces $m\angle DFC = 90°$.

Como $m\angle AFD + m\angle DFC + m\angle CFB = 180° \ \Rightarrow m\angle AFD = 45°$

Además, se tiene que $AD = DF$, entoces $\triangle AFD$ es un triángulo isósceles, se deduce que $m\angle DAF = 45°$.

Por lo anterior, se tiene que $m\angle AFD = m\angle DAF = 45°$. Por el teorema de la suma de las medidas de los ángulos internos de un tríangulo se obtiene que $m\angle ADF = 90°$.

4. Carlos tiene 16 juguetes y Diego 24. Ellos quieren regalar la mayor cantidad de juguetes a la mayor cantidad de familiares, de manera que cada uno obtenga la misma cantidad. La cantidad de familiares a los que le regalaron los juguetes corresponde a

   (a) 2
   (b) 3
   (c) 5
   (d) 8

- Opción correcta: (c)
- Solución: Se procede a calcular el $m.c.d(16, 24) = 8$. Carlos y Diego regalan 8 juguetes a cada familiar. Carlos regala juguetes a dos familiares (pués $\frac{16}{8} = 2$), mientras que Diego regala juguetes a tres familiares (pués $\frac{24}{8} = 3$)

  Por lo tanto, Carlos y Diego regalaron juguetes de colección a cinco de sus familiares.

5. El papá de Esmeralda acaba de comprar un carro. Sus números favoritos son el 3 y el 5, por lo que le gustaría que el número de la placa terminara en alguno de ellos, pero la placa se la asignarán aleatoriamente. Sabiendo que la placa está formada por tres letras consonantes seguidas de tres dígitos del 0 al 9, la probabilidad de que la placa asignada termine en 3 o 5 es

(a) $\frac{1}{5}$

(b) $\frac{1}{10}$

(c) $\frac{1}{100}$

(d) $\frac{1}{1000}$

- Solución:

  Dado que no tiene preferencia por las letras, estas no afectarán la probabilidad.
  En la parte numérica, cada dígito se puede tomar de 10 maneras distintas (cualquiera de los dígitos del 0 al 9), por lo que la cantidad de combinaciones de tres dígitos es $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$, es decir, la cantidad de casos totales.

  La cantidad de casos favorables es $10 \cdot 10 \cdot 2 = 200$, pues en el último dígito solo puede escogerse de dos maneras. Entonces la probabilidad es $\frac{200}{1000} = \frac{1}{5}$

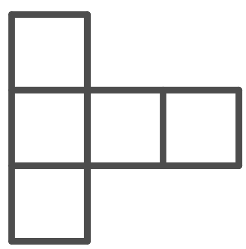
6. La figura adjunta consta de 5 cuadrados de igual área. Si el área de esta figura es de $45cm^2$, entonces el perímetro de la figura corresponde a

   (a) $9cm$

   (b) $18cm$

   (c) $36cm$

   (d) $76cm$



- Opción correcta: (c)

- Solución:

  Como el área de la figura es de $45cm^2$ y la figura consta de 5 cuadrados entonces el área de cada cuadrado es $9cm^2$. Luego el lado de cada cuadrado es de $3cm$. Finalmente, el perímetro de la fgura es $12 \cdot 3 = 36cm$

7. Considere el número $n = 252A8$. Si A es el dígito las decenas. El valor que debe asumir A para que n sea divisible por 12 corresponde a

   (a) 1

   (b) 4

   (c) 7

   (d) 8

- Opción correcta: b

- Solución: El número $12 = 3 \cdot 4$ por lo cual se debe determinar divisibilidad por 3 y por 4.
  Divisibilidad por 3: $2 + 5 + 2 + A + 8 = 17 + A$, luego A puede ser 1, 4 y 7.

Divisibilidad por 4: Las últimas 2 cifras deben ser múltiplo de 4, en este caso 18, 48 y 78. De ellos, solo 48 lo cumple. Por lo tanto, el valor de A es 4.

8. Se tiene el líquido de 3 perfumes diferentes con $304ml$, $456ml$ y $684ml$ cada uno. Si se requiere envasar en frascos con la misma y mayor capacidad posible y sin mezclarlos entonces la cantidad de frascos que se necesita corresponde a
   (a) 4
   (b) 19
   (c) 76
   (d) 361

- Opción correcta: b
- Solución: Se obtiene el $mcd(304, 456, 684) = 76$. Luego la cantidad de frascos está determinada por $\dfrac{304}{76} + \dfrac{456}{76} + \dfrac{684}{76} = 4 + 6 + 9 = 19$

9. Para elaborar decoraciones escolares se compró cartulina azul, blanca y roja. Las cartulinas rojas son tantas como las blancas y azules juntas. Si sólo fue necesario usar las dos terceras partes del total de las cartulinas, entonces con certeza se usaron
   (a) Cartulinas azules.
   (b) Cartulinas rojas.
   (c) Todas las cartulinas blancas.
   (d) Todas las cartulinas rojas.

- Opción correcta: b
- Solución: Como las cartulinas rojas son tantas como las blancas y azules entonces significa que el 50 % de las cartulinas son rojas y el otro 50 % son blancas y azules. Al haber usado 2/3 significa que se usaron aproximadamente 66 %, por lo tanto con certeza usaron cartulinas rojas.

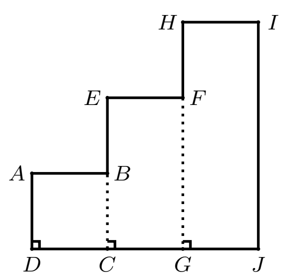
10. En un determinado colegio se realizó una encuesta sobre el gusto por las Matemáticas. De un total de 580 estudiantes entre mujeres y hombres, 250 indicaron que no les gusta las Matemáticas. Mientras que exactamente 125 hombres de un total de 280 indicaron que si les gusta las Matemáticas. Si se elige un estudiante del colegio al azar, la probabilidad de elegir una mujer que le gusta las Matemáticas corresponde a
    (a) $\dfrac{41}{60}$
    (b) $\dfrac{25}{56}$
    (c) $\dfrac{25}{116}$
    (d) $\dfrac{41}{116}$

- Opción correcta: d
- Solución: Si 250 no prefieren Matemáticas entonces 330 si tienen gusto por Matemáticas. Luego de los 330 que gustan de las Matemáticas 125 son hombres, es decir, 205 mujeres prefieren Matemáticas. De esta forma, la probabilidad de elegir a una que le guste Matemáticas es $\dfrac{205}{580} = \dfrac{41}{116}$

11. En una caja se colocan bolas verdes, rojas y azules. Una tercera parte del total son rojas y una cuarta parte del restante son azules. Si hay 48 bolas verdes entonces, la cantidad de bolas azules corresponde a
    (a) 16
    (b) 32
    (c) 48
    (d) 64

- Opción correcta: a
- Solución: Si las rojas son $\frac{1}{3}$ del total entonces el resto será $\frac{2}{3}$ partes. Luego las azules son $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$. Así, $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$. De esta forma, las verdes corresponden a la mitad de las bolas, por lo tanto el total de las bolas es de 96, de las cuales 32 son rojas, 16 azules y 48 verdes.

12. En la siguiente figura $DC = CG = GJ = AD = 3$, $(\square EFGC) = 2(\square ABCD)$ y $(\square HIJG) = 2(\square EFGC)$, entonces el perímetro de la figura corresponde a
    (a) 42
    (b) 21
    (c) 54
    (d) 33



- Opción correcta: (a)
- Solución:

  Como $DC = AD$ entonces $(\square ABCD) = 9$, $(\square EFGC) = 18$ y $(\square HIJG) = 36$ de donde $IJ = 12$, y así el el perímetro solicitado está dado por $2DJ + 2IJ = 18 + 24 = 42$

13. Un guerrero Panda llamado PO tiene problemas para subir las escaleras que llevan al templo de su maestro, la cual tiene 1001 escalones enumerados, por lo que usa esta estrategia, en su primer salto avanza tres escalones, en su segundo salto dos escalones y en el tercer salto un escalón, para luego descansar y comer bambú, así retomar fuerzas y repetir el proceso. Se sabe que PO en su primer salto llega al escalón 3, con el segundo salto llega al escalón 5 y en su tercer salto al escalón 6, en el cual descansa para repetir el proceso. PO decide visitar a sus amigos solo si cae en los escalones de sus casas y se sabe que Tigresa vive en el escalón 237, Grulla en el escalón 451, Mono en el escalón 647 y Viper en el escalón 789, entonces se sabe con certeza que PO no visitó a

(a) Tigresa

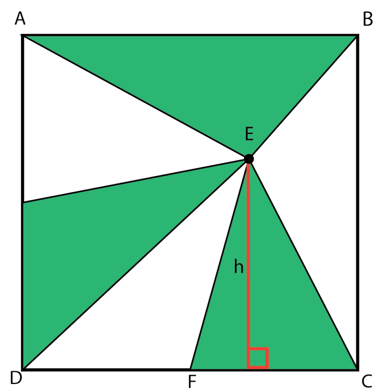
(b) Grulla

(c) Mono

(d) Viper

- Opción correcta: (b)
- Solución: Puede notarse que PO unicamente usa los escalones múltiplos de 3 y aquellos cuyo número es de la forma $6n+5$ con $n \in \mathbb{N}$, por lo que se sabe con certeza que PO no caerá en el escalón 451 y por lo tanto no visitará a su amigo Grulla.

14. Un cuadrado de área $81cm^2$ está dividido en 6 triángulos de igual área como se muestra en la figura adjunta. El valor de la altura del $\triangle EFC$ sobre $\overline{FC}$ corresponde a



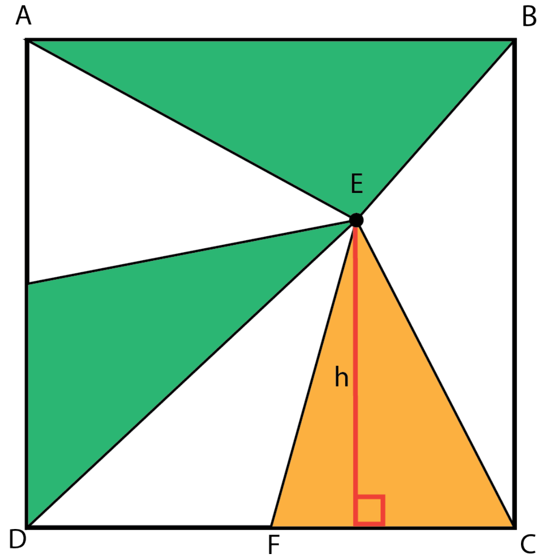
(a) 3

(b) 5

(c) 5.5

(d) 6

- Opción correcta: (d)
- Solución: De acuerdo con la información dada, se tiene la siguiente figura:



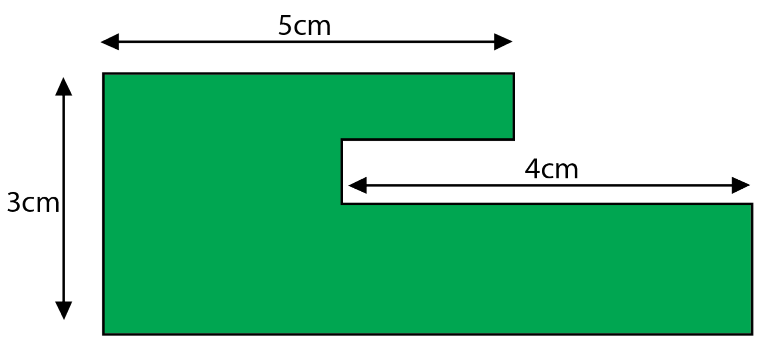
El segmento solicitado corresponde a la altura h del triángulo $\triangle EFC$, y su área es la sexta parte del área del cuadrado.

Entonces,

$$\triangle EFC = \frac{\frac{\overline{DC} \cdot h}{2}}{2} = \frac{\overline{DC} \cdot h}{4} = \frac{9 \cdot h}{4} = \frac{81}{6}$$

por tanto h=6

15. El jardín de Carlos tiene la forma que se muestra.

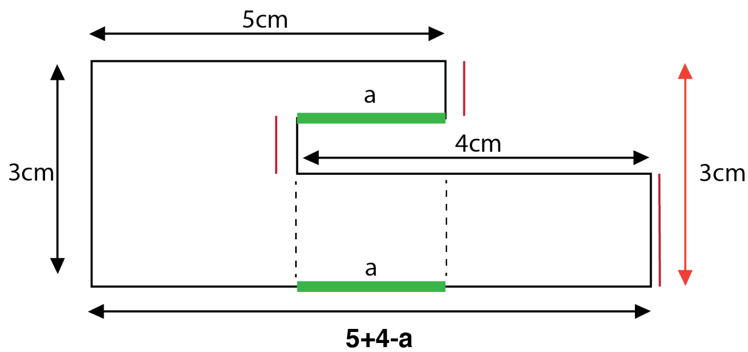


Todos los lados son paralelos o perpendiculares entre sí. Algunas de las dimensiones se muestran en el diagrama adjunto. El perímetro del jardín corresponde a

(a) 22cm
(b) 23cm
(c) 24cm
(d) 25cm

- Opción correcta: (c)

- Solución: De acuerdo con la información dada, se tiene la siguiente figura:



Las partes verticales del lado derecho miden en total lo mismo que el izquierdo: 3. Por otro lado, si llamamos .ª.ª la porción horizontal, como se muestra en la figura, tenemos que la parte horizontal de abajo mide $5 + 4 - a$. El perímetro es $3 + 3 + 5 + a + 4 + 5 + 4 - a = 24$.

16. Si a las 4:00 p.m. el minutero (manecilla que marca los minutos) y el horario (la manecilla que marca las horas) forman un ángulo obtuso, como se muestra en la figura. La medida del ángulo que forma el minutero y el horario a las 4:10 p.m. corresponde a

(a) $60°$

(b) $65°$

(c) $70°$

(d) $72°$

- Opción correcta: (b)

- Solución: Como el minutero recorre $360°$ en una 60 minutos, eso significa que en un minuto recorre $\frac{360°}{60} = 6°$, del mismo como como el horario recorre $360°$ en una 12 horas o en $12{\cdot}60 = 720$ minutos, eso significa que en un minuto recorre $\frac{360°}{720} = 0{,}5°$. Lo cual significa que a las 4:00 el horario y el minutero forman un ángulo de $120°$ ya que al minutero en 20 minutos recorre $20 \cdot 6 = 120°$. Por lo tanto a las 4:10, el horario avanza $10 \cdot 0{,}5° = 5°$, mientras que el minutero avanza $10 \cdot 6° = 60°$, lo que significa que el ángulo entre ellas es: $120° + 5° - 60° = 65°$

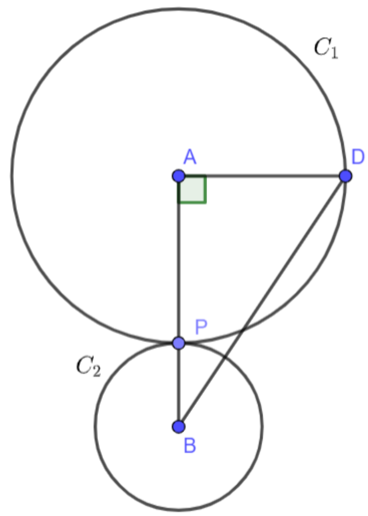
17. La figura adjunta muestra la circunferencia C_1 que tiene como centro A y la circunferencia C_2 que tiene como centro B. Ambas circunferencias se intersecan en un único punto P. El área del círculo delimitado por C_1 es $16\pi\, cm^2$ y la longitud de la circunferencia C_2 es $4\pi\ cm$. Si $A-P-B$, el área del $\triangle ABD$ corresponde a

(a) $8\ cm^2$

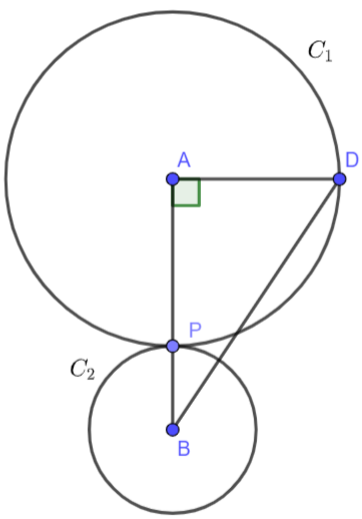
(b) $12\ cm^2$

(c) $16\ cm^2$

(d) $24\ cm^2$



- Opción correcta: (b)
- Solución:



Como el área de C_1 es $16\pi\ cm^2$, $\overline{AD}$ es un radio en ese círculo y el área de un círculo es πr^2, entonces $AD = 4$.
Como P es el punto de intersección de C_1 y C_2, entonces $\overline{AP}$ es un radio en el círculo C_1 y $\overline{PB}$ es un radio en el círculo C_2, entonces $AP = 4$.
Como la longitud de la circunferencia C_2 es $4\pi\ cm$, y $\overline{PB}$ es un radio en ese círculo y la longitud de la circunferencia es $2\pi r$, entonces $PB = 2$.
Como $A-P-B$, entonces $AB = AP + PB = 4 + 2 = 6$.
Ahora bien, el $\triangle ABD$ es rectángulo recto en A, pues $\overline{AD} \perp \overline{AB}$ así
$a \triangle ABD = \dfrac{AD \cdot AB}{2} = \dfrac{4 \cdot 6}{2} = 12\ cm^2$

18. Sofía se encuentra haciendo paquetes de confites para una fiesta, con tres tipos de confites dis-

tintos. Tiene 420 confites del tipo A, 525 del tipo B y del tipo C tiene 735. Cada paquete debe contener al menos 20 confites del tipo C. Si Sofía desea hacer la máxima cantidad de paquetes iguales, la cantidad de paquetes que debe hacer corresponde a

(a) 15

(b) 21

(c) 35

(d) 105

- Opción correcta: (c)

- Solución:

$$\begin{array}{ccc|c} 420 & 525 & 735 & 3 \\ 140 & 175 & 245 & 5 \\ 28 & 35 & 49 & 7 \\ 4 & 5 & 7 & \end{array}$$

Se podrían hacer $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$ paquetes de confites con 4 del tipo A, 5 del tipo B y 7 del tipo C, sin embargo esto no satisface la condición de que cada paquete debe contender al menos 20 confites del tipo C.

Considerando

$$\begin{array}{ccc|c} 420 & 525 & 735 & 7 \\ 60 & 75 & 105 & 5 \\ 12 & 15 & 21 & \end{array}$$

Así que se deben realizar $5 \cdot 7 = 35$ paquetes con 12 del tipo A, 15 del tipo B y 21 del tipo C.

19. El papá de Santiago le regala un libro que contiene 30 cuentos entre 1 y 30 páginas de extensión. El primer cuento empieza en la primera página. En el libro no hay páginas en blanco ni dos cuentos que compartan la misma página. Además, no hay dos cuentos con la misma extensión. La mayor cantidad de cuentos que pueden comenzar en una página impar corresponde a

a) 19

b) 20

c) 21

d) 23

- Opción correcta: (d)

- Solución: Si se procede acomodar todos los cuentos con extensión par, se tiene 15 cuentos que cumplen la condición. Luego se acomoda todos los cuentos con extensión impar, se tiene 8 cuentos que cumplen la condición. Por lo tanto, se tiene en total 23 cuentos que cumplen la condición dada. No se puede encontrar otro acomodo mejor. Pues, si un cuento empieza en una página impar y su extensión es impar, el siguiente cuento inicia en una página impar. No se cumple la condición dada. Si n es la cantidad de cuentos con extensión impar que cumplan la condición dada, entonces al menos $n-1$ cuentos no cumplen con la condición. Para lograr un mejor acomodo, al que se dio, se necesita $n \leq 8$ (si no, $30-(n-1) < 23$), entonces la cantidad máxima de cuentos que pueden cumplir la condición dada es $15+8 = 23$. Por lo tanto, no se puede encontrar un acomodo con más de 23 cuentos que cumplan la condición.

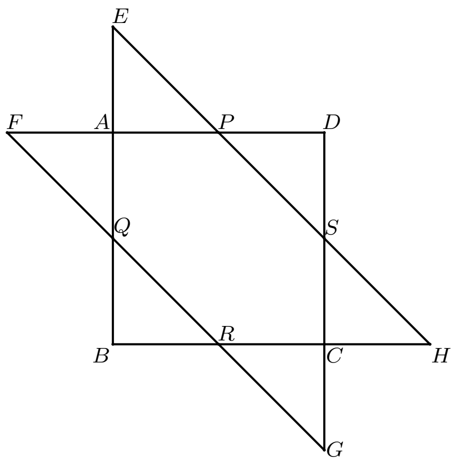
20. En la siguiente figura $\square ABCD$ es un cuadrado de lado 2, $\triangle EBH$ y $\triangle FDG$ son triángulos rectángulos isósceles, cuyos lados iguales miden 3 cada uno. El área del polígono $AQRCSP$ es

(a) 2

(b) 3

(c) $\frac{7}{2}$

(d) $\frac{9}{4}$



- Opción correcta: (b)
- Solución:

Sea T el punto de intersección de $\overline{PR}$ y $\overline{QS}$. Vemos entonces que el área del polígono se puede dividir como

$$(AQRCSP) = (AQTP) + (TRCS) + (PTS) + (QRT)$$

Por lo que $(AQRCSP) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3$