XXIV OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA

MEP – ITCR – UCR – UNA – UNED - MICIT

SOLUCIÓN

PRIMERA ELIMINATORIA NACIONAL

NIVEL B

2012

1. El recíproco de la suma de los recíprocos de dos números es $\frac{14}{3}$. Si la suma de los números es 21 entonces su producto es igual a

a) $\frac{9}{2}$
b) $\frac{2}{9}$
c) $\frac{1}{98}$
d) 98

Solución **d) 98**

Si los números se representan por x e y entonces sus recíprocos son $\frac{1}{x}$ y $\frac{1}{y}$.

Entonces $\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=\frac{1}{\frac{x+y}{xy}}=\frac{xy}{x+y}=\frac{14}{3}$. Por lo tanto se debe cumplir que $\frac{xy}{21}=\frac{14}{3}$ de donde $xy=98$.

2. En una urna hay 5 bolas rojas, 7 verdes y 9 amarillas, todas del mismo peso y del mismo tamaño. Una persona extrae las bolas de dos en dos sin mirar el color. El menor número extracciones que tiene que realizar para tener certeza de que ya sacó dos bolas del mismo color corresponde a

a) 2
b) 3
c) 4
d) 5

Solución **a) 2**

Cuando la persona realiza una extracción no se garantiza con certeza que sean del mismo color. Al realizar la segunda extracción, la persona ha sacado 4 bolas y como solo hay tres colores, necesariamente tiene que haber un par de bolas del mismo color. Por lo que la respuesta correcta es A.

3. Si a, b, c son números reales distintos, no nulos, la solución de la ecuación $(ax+b)(b-2c) = b(4c - ax + b)$ es

a) $\dfrac{bc}{a(b-c)}$

b) $\dfrac{3bc}{a(c-b)}$

c) $\dfrac{b(b+c)}{ac}$

d) $\dfrac{3bc}{a(b-c)}$

Solución: **d)** $\dfrac{3bc}{a(b-c)}$

$(ax+b)(b-2c) = b(4c - ax + b)$

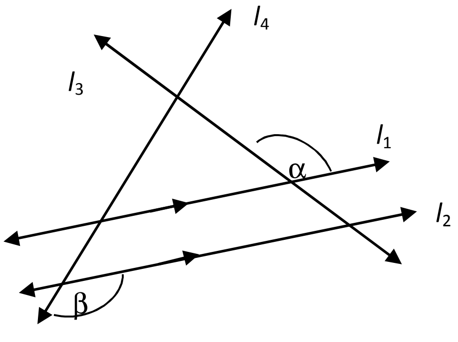
$\Rightarrow abx - 2acx + b^2 - 2bc \;=\; 4bc - abx + b^2$

$\Rightarrow 2abx - 2acx = 6bc$

$\Rightarrow 2ax(b-c) = 6bc$

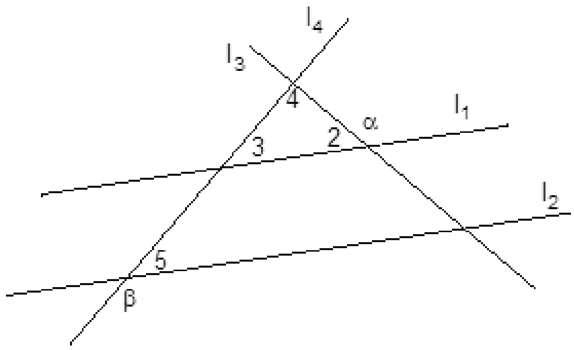
$x = \dfrac{3bc}{a(b-c)}$

4. En la figura adjunta $l_1 \parallel l_2$ y $l_3 \perp l_4$. Si $\text{m}\angle\alpha = 125°$ entonces $\text{m}\angle\beta$ es



a) $125°$
b) $135°$
c) $145°$
d) $155°$

Solución: c) $145°$



$m\angle 2 = 180° - m\angle \alpha = 55°$

$m\angle 3 = 90° - m\angle 2 = 35°$ pues $m\sphericalangle 4 = 90°$

$m\angle 5 = m\angle 3 = 35°$ por ser ángulos correspondientes entre paralelas

$m\angle \beta = 180° - m\angle 5 = 145°$

5. Juan debe sembrar en su huerta 320 plantas de zanahoria, 240 de lechugas y 360 de culantro. El terreno disponible para sembrarlas es de forma rectangular y quiere que cada hilera tenga la misma cantidad de plantas, sin mezclar diferentes tipos en cada hilera. El número de hileras que debe hacer es

a) 2880
b) 432
c) 40
d) 23

Solución: d) 23
El máximo común divisor de $320, 240$ y 360 es 40, por lo que cada hilera debe tener 40 plantas. Debe hacer 8 filas de zanahorias, 6 de lechugas y 9 de culantro, para un total de 23 hileras.

6. El resultado de racionalizar el denominador de la expresión $\dfrac{x+y-2\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ corresponde a

a) $\sqrt{x}+\sqrt{y}$

b) $\sqrt{x}-\sqrt{y}$

c) $\dfrac{x\,(1+2\sqrt{y})+y\,(1-2\sqrt{x})}{x-y}$

d) $\dfrac{x+y-2\,(x\sqrt{y}+y\sqrt{x})}{x-y}$

Solución	**b)** $\sqrt{x}-\sqrt{y}$

$$\frac{x+y-2\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2-2\sqrt{xy}+\left(\sqrt{y}\right)^2}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$$

7. Si $P(x)$ es un polinomio tal que -3 y 5 son dos de sus ceros, entonces, con certeza se puede asegurar que un factor del polinomio $Q(x)=P(x)+\left(x^2-9\right)(x+5)$ es

a) $x+5$
b) $x-3$
c) $x-5$
d) $x+3$

Solución	**b)** $x-3$

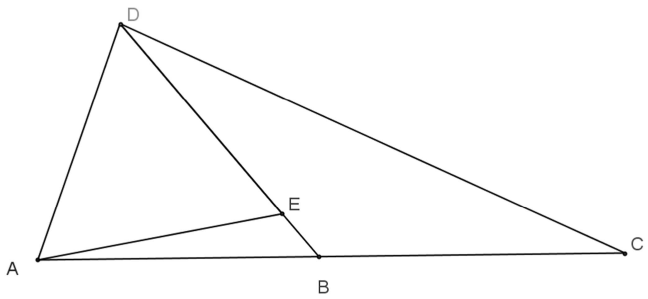
$P(x)=(x+3)(x-5)R(x)$
$Q(x)=(x+3)(x-5)R(x)+(x+3)(x-3)(x+5)$
$=(x+3)\left[(x-5)R(x)+(x-3)(x+5)\right]$

8. Dados cuatro puntos no colineales en un plano π_1 y tres puntos no colineales en un plano π_2, $\pi_2 \parallel \pi_1$, el número máximo de rectas que quedan determinadas por estos 7 puntos es

a) 12
b) 18
c) 21
d) 28

Solución: **c) 21**
En π_1 quedan determinadas 6 rectas, en π_2 quedan determinadas 3 rectas. Además, cada uno de los puntos de π_1 con cada uno de los puntos de π_2 determinan una recta, es decir, 12 rectas más.
Por lo tanto, quedan determinadas 21 rectas.

9. En la figura adjunta el ΔAED es equilátero y el ΔBCD es isósceles, además m∠DAB = 70°, D – E – B y A – B – C . Entonces m∠ADC corresponde a



a) 85°
b) 87,5°
c) 100°
d) 110°

Solución **a) 85°**

Como el ΔAED es equilátero, entonces los $\angle ABD, \angle BDA$ y $\angle DAB$ son congruentes y mide 60° cada uno. Entonces el $\text{m}\angle AEB = 120°$, por ser este ángulo el suplemento de 60° y $\text{m}\angle EAB = 70° - 60° = 10°$, además $\text{m}\angle EBA = 180° - 10° - 120° = 50°$, por la suma de los ángulos internos del ΔAEB y como A, B, y C son colineales entonces $\text{m}\angle DBC = 180° - 50° = 130°$, entonces la $\text{m}\angle BDC = (180° - 130°): 2 = 25°$, por ser el el ΔBCD isósceles. Por lo que finalmente la $\text{m}\angle ADC = 60° + 25° = 85°$.

10. Considere el polinomio $P(x)=(x+a)^2-(x+b)^2$ donde a y b son dos números reales distintos. Si k es un número real tal que $P(k)+P(-a)=0$ entonces el valor de k es

a) $-b$
b) b
c) $\dfrac{a-b}{2}$
d) $\dfrac{a+b}{2}$

Solución **a)** $-b$

$$(k+a)^2-(k+b)^2+(-a+a)^2-(-a+b)^2=0$$
$$k^2+2ka+a^2-k^2-2kb-b^2-b^2+2ab-a^2=0$$
$$2ka-2kb-2b^2+2ab=0$$
$$2k(a-b)=2b^2-2ab$$
$$k=\frac{2b(b-a)}{2(a-b)}$$
$$k=-b$$

11. Al resolver el sistema de ecuaciones $\begin{cases}\dfrac{x}{5}-\dfrac{y}{60}=m\\ \dfrac{y}{5}-\dfrac{x}{60}=n\end{cases}$ con $m,n\in\mathbb{R}$. El valor de $x-y$ es

a) $\dfrac{60}{143}(m-n)$
b) $\dfrac{60}{143}(n-m)$
c) $\dfrac{60}{13}(n-m)$
d) $\dfrac{60}{13}(m-n)$

Solución: d) $\frac{60}{13}(m-n)$ $\begin{cases} \frac{x}{5}-\frac{y}{60}=m \\ \frac{y}{5}-\frac{x}{60}=n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12x-y=60m \\ 12y-x=60n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12x-y=60m \\ x-12y=-60n \end{cases}$ $\Rightarrow (12x-y)+(x-12y)=60m+(-60n)$ $\Rightarrow 13(x-y)=60(m-n)$ $\Rightarrow x-y=\frac{60}{13}(m-n)$

12. El número máximo de triángulos en los cuales dos lados miden 6cm y 9cm y la medida del tercer lado es un número natural corresponde a

a) 3
b) 5
c) 8
d) 11

Solución d) 11   Si se designa con x la longitud del tercer lado del triángulo, por la desigualdad triangular se tiene, $9-6<x<9+6$ $3<x<15$ Entonces *x* puede ser 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 y 14.

13. La cifra de las unidades del número que resulta de $\left(5^0-2^3\right)^{2012}-1974$ corresponde a

a) 1
b) 3
c) 7
d) 9

Solución	**c) 7**

$(5^0 - 2^3) = (1 - 8) = (-7)$ y ahora calculemos la cifra de las unidades de $(-7)^{2012}$, como $(7)^1 = 7, (7)^2 = 49, (7)^3 = 343, (7)^4 = 2401, (7)^5 = 16807$ ....Entonces después de cada 4 unidades de incremento en el exponente se repiten las cifras de las unidades por lo que 2012:4 el residuo es 0 entonces la cifra de las unidades de $(-7)^{2012}$ es 1. Y al realizar la resta con el número 1974, el número que resulta tendrá en la cifra de las unidades al 7.

14. Una expresión equivalente a $\dfrac{23{,}1 \cdot 10^{22} - 1{,}25 \cdot 10^{23}}{2{,}00 \cdot 10^{13}}$ corresponde a

a) $10{,}925 \cdot 10^{10}$
b) $2{,}25 \cdot 10^{10}$
c) $1{,}06 \cdot 10^{9}$
d) $5{,}30 \cdot 10^{9}$

Solución	**d)** $5{,}30 \cdot 10^{9}$

Para obtener el resultado de la expresión dada se realiza lo siguiente:

$$\frac{23{,}1 \times 10^{22} - 1{,}25 \times 10^{23}}{2{,}00 \times 10^{13}} = \frac{2{,}31 \times 10^{23} - 1{,}25 \times 10^{23}}{2{,}00 \times 10^{13}}$$

$$= \frac{2{,}31 \times 10^{23} - 1{,}25 \times 10^{23}}{2{,}00 \times 10^{13}} = \frac{1{,}06 \times 10^{23}}{2{,}00 \times 10^{13}}$$

$$= 0{,}53 \times 10^{10} = 5{,}3 \times 10^{9}$$

15. En un club deportivo hay 105 personas, de las cuales 39 practican baloncesto, 83 fútbol y 27 ambos deportes. La cantidad de personas que no practican baloncesto ni fútbol corresponde a

a) 10
b) 15
c) 20
d) 25

Solución:	**a) 10**

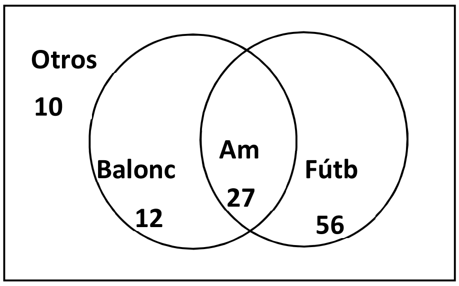
Construyendo diagramas de Euler y realizando los siguientes cálculos:

39 – 27 = 12 número de personas que practican solamente baloncesto

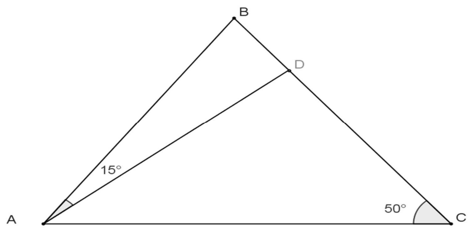
83 – 27 = 56 número de personas que practican solamente fútbol

27 + 12 + 56 = 95 número de personas que practican baloncesto, fútbol o ambos

105 – 95 = 10 número de personas que practican otros deportes que no sean baloncesto ni fútbol.



16. En la figura, la bisectriz del $\angle B$ interseca a $\overline{AC}$ en E y a $\overline{AD}$ en M.

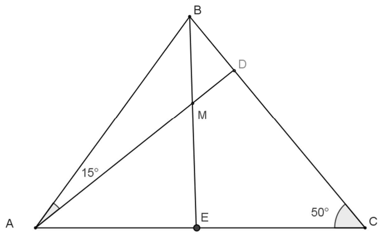


Si $m\angle BCA = 50^\circ$, $m\angle DAB = 15^\circ$ y $m\angle DMB = 55^\circ$ entonces con certeza se cumple que

a) ΔABC es escaleno
b) ΔABC es equilátero
c) $\overline{AD}$ es mediana sobre $\overline{BC}$
d) $\overline{BE}$ es mediana sobre $\overline{AC}$

Solución: d) $\overline{BE}$ es mediana sobre $\overline{AC}$

Con los datos tenemos la siguiente figura

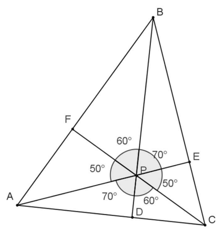


Tenemos que $m\angle BCA = 50^\circ$, $m\angle BAD = 15^\circ$, $m\angle BMD = 55^\circ$, con esto observe que por ángulo suplementario $m\angle EMD = 125^\circ = m\angle BMA$, esta última igualdad por ángulos opuestos, luego $m\angle MBA = 40^\circ$, porque la suma de las medidas de los ángulos internos es $180°$. Por ser bisectriz $\overline{BE}$ tenemos que $m\angle MBC = 40^\circ$, luego $m\angle BEC = 90^\circ$ (observe ΔBEC) así $m\angle BEA = 90^\circ$ entonces $\Delta BEC \cong \Delta BEA$ por el criterio ALA. Por lo tanto $AE = EC$ entonces $\overline{BE}$ es mediana sobre $\overline{AC}$ por definición. Observe que las demás opciones no son ciertas ya que los ángulos internos del ΔABC hacen que sea isósceles y ΔBAD no es congruente con ΔADC para que $\overline{AD}$ es mediana sobre $\overline{BC}$.

17. Si $\overline{BD}$, $\overline{CF}$ y $\overline{AE}$ son alturas del ΔABC que se intersecan en el punto P, con P en el interior del triángulo tales que $m\angle BPE = 60^\circ$ y $m\angle DPC = 70^\circ$, entonces con certeza se cumple que ΔABC es

a) escaleno
b) isósceles
c) obtusángulo
d) rectángulo

Solución **a) escaleno**



Al realizar un dibujo que represente dicha situación tenemos que al intersecarse dos alturas se determinan ángulos de $60°$, $70°$, $50°$; además sus alturas forman con las bases ángulos rectos, por lo tanto tenemos que los ángulos del ΔABC miden $60°$, $70°$, $50°$. Por lo tanto el triángulo es escaleno.

18. Considere un número n de la forma $n=\dfrac{x^3+3x^2+2x+x^2y+3xy+2y}{x^2+2x+xy+2y}$ con x un número par y y un múltiplo de 5, entonces con certeza n es

a) par
b) impar
c) múltiplo de 5
d) múltiplo de 3

Solución b) impar

Al factorizar el numerador y el denominador de la expresión se obtiene

$$n=\frac{x^3+3x^2+2x+yx^2+3xy+2y}{x^2+2x+yx+2y}=\frac{x(x^2+3x+2)+y(x^2+3x+2)}{x(x+2)+y(x+2)}$$

$$=\frac{(x+y)(x^2+3x+2)}{(x+y)(x+2)}=\frac{(x+y)(x+2)(x+1)}{(x+y)(x+2)}=x+1$$

Como x es par, se tiene que $x+1$ es impar

19. El trapecio $\square ABCD$ es tal que $AD=AB=BC=1$, $DC=2$ y $\overline{AB}$ es paralelo a $\overline{DC}$. La altura del trapecio es

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

c) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Solución **d)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Si se traza la altura del trapecio desde A y desde B se forma un rectángulo y como $DC=2$, entonces la base de cada uno de los triángulos que se forma es $\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}$.

Por Teorema de Pitágoras, la altura del trapecio es $\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

20. Dos números reales a y b distintos de cero, cumplen que $ab = a - b$. Entonces el valor de $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - ab$ corresponde a

a) -2
b) $-\frac{1}{2}$
c) $\frac{1}{2}$
d) 2

Solución **d) 2**
$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - ab = \frac{a^2 + b^2 - (ab)^2}{ab} = \frac{a^2 + b^2 - (a-b)^2}{ab}$
$= \frac{a^2 + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2)}{ab} = \frac{a^2 + b^2 - a^2 + 2ab - b^2}{ab} = \frac{2ab}{ab} = 2$

21. Pedro, Juan y Pablo tienen 30 bolinchas entre los tres. Si Pablo le da 5 bolinchas a Juan, Juan le da 4 bolinchas a Pedro y Pedro le da 2 bolinchas a Pablo, todos quedan con la misma cantidad. Entonces la cantidad de bolinchas que tenía Pablo al principio es

a) 8
b) 9
c) 12
d) 13

Solución **d) 13**
Como todos quedan con la misma cantidad, al final del intercambio todos tienen 10 bolinchas. Además, Pablo al final se queda con tres bolinchas menos. Por lo tanto, Pablo al principio tenía 13 bolinchas.

22. Sean a y b números reales distintos tales que $2a^2 + 2b^2 = 5ab$. Entonces la cantidad de valores posibles para la expresión $\frac{a+b}{a-b}$ es

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4

Solución **b) 2**

Como $2a^2+2b^2=5ab \Rightarrow 2a^2-5ab+2b^2=0 \Rightarrow (2a-b)(a-2b)=0$

$$2a-b=0 \Rightarrow b=2a \Rightarrow \frac{a+b}{a-b}=\frac{a+2a}{a-2a}=-3$$

$$a-2b=0 \Rightarrow 2b=a \Rightarrow \frac{a+b}{a-b}=\frac{2b+b}{3b-b}=\frac{3}{2}$$

23. El resultado de simplificar la expresión $\frac{(x-y)^2-a^2}{x^2-(y+a)^2}$ corresponde a

a) $\frac{a}{2y}$

b) $-\frac{a}{2y}$

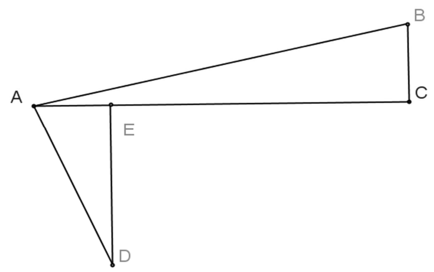
c) $\frac{x+y-a}{x-y+a}$

d) $\frac{x-y+a}{x+y+a}$

Solución d) $\frac{x-y+a}{x+y+a}$

$$\frac{(x-y)^2-a^2}{x^2-(y+a)^2}=\frac{(x-y+a)(x-y-a)}{(x+(y+a))(x-(y+a))}=\frac{(x-y+a)(x-y-a)}{(x+y+a)(x-y-a)}=\frac{x-y+a}{x+y+a}$$

24. En la figura $\angle BAD$, $\angle BCA$ y $\angle DEA$ son rectos. Si AB es el doble de AD, $DE=2$ cm y $BC=1$ cm, entonces la medida, en centímetros, de $\overline{EC}$ es



a) $\frac{1}{2}$
b) 2
c) $\frac{7}{2}$
d) 4

Solución **c)** $\frac{7}{2}$

Como $\angle BAE$ y $\angle EAD$ son complementarios, entonces por criterio AA $\Delta\, ABC \sim \Delta\, DAE$. Así, $\frac{AB}{DA} = \frac{AC}{DE} \Rightarrow \frac{2\,DA}{DA} = \frac{AC}{2} \Rightarrow AC = 4$. De forma análoga, $\frac{AB}{DA} = \frac{BC}{AE} \Rightarrow AE = \frac{1}{2}$. Por lo tanto, $EC = 4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$.

25. Un cuadrado A tiene igual área que un rectángulo B, en el cual el largo mide 2cm más que la mitad de lo que mide el lado de A, y el ancho de B mide 1cm menos que el doble de lo que mide el lado de A. La diferencia entre el perímetro de B y el perímetro de A, en centímetros, es un número

a) mayor que 3
b) entre 2 y 3
c) entre 1 y 2
d) entre 0 y 1

Solución b. entre 2 y 3

Si x representa la medida del lado de A entonces las dimensiones de B están dadas por $2x-1$, y, $2+\frac{x}{2}$. Por lo tanto, al igualar las áreas se obtiene:

$$\left(2+\frac{x}{2}\right)(2x-1) = x^2 \Leftrightarrow 4x-2+x^2-\frac{x}{2} = x^2 \Leftrightarrow 2 = \frac{7x}{2} \Leftrightarrow x = \frac{4}{7}$$

Por lo tanto el perímetro del cuadrado es $\frac{16}{7}$ y el del rectángulo $\frac{34}{7}$, la diferencia es entonces $\frac{18}{7} = 2\frac{4}{7}$.