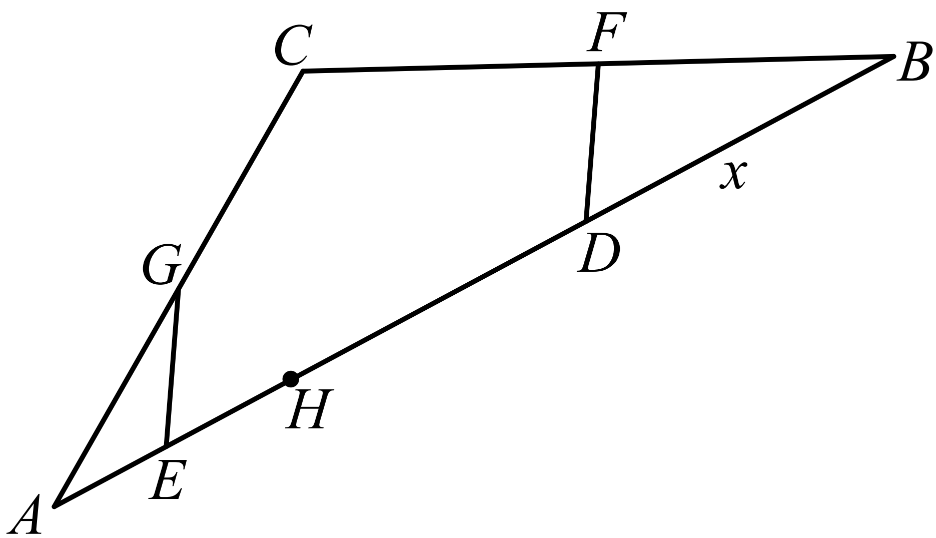
XXVII OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA

UNA - UCR - TEC - UNED - MEP - MICIT

PRIMERA ELIMINATORIA NACIONAL



II Nivel

$(8^\circ - 9^\circ)$

2015

Estimado estudiante:

La Comisión de las Olimpiadas Costarricenses de Matemática 2015 le saluda y le da la más cordial bienvenida a la Primera Eliminatoria Nacional de estas justas académicas y le desea los mayores éxitos.
La prueba consta de un total de 25 preguntas de selección única.

Puede consultar la lista de estudiantes clasificados a partir del viernes 3 de julio, en la siguiente dirección electrónica:

www.olcoma.com

INDICACIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en la hoja de respuestas que se le ha entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no están hechos a escala.
- El formulario de preguntas es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- No se permite el uso de hojas adicionales.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en la hoja de respuestas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A yB	$\angle ABC \approx \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre los puntos P y R

1. Si $m = \sqrt[n]{4^{2-n}}$ el valor numérico de $(4m)^{\frac{3n}{2}}$ corresponde a
   (a) 2
   (b) 4
   (c) 16
   (d) 64

2. Se saca una carta de una baraja de 52 naipes, sin volver a reponer esta, luego se saca otra. La baraja tiene 26 cartas rojas. Si la primera carta que se sacó es roja, la probabilidad de que la siguiente también lo sea es
   (a) $\frac{25}{51}$
   (b) $\frac{25}{52}$
   (c) $\frac{26}{51}$
   (d) $\frac{26}{52}$

3. Al efectuar $\left(b - \frac{1}{b}\right) \div \frac{b+1}{b^2} - \frac{1}{b^{-2}}$ se obtiene
   (a) 1
   (b) b
   (c) -1
   (d) $-b$

4. Un número entero n se multiplica por 5 o 6, luego se le suma 5 o 6 al resultado, después se le vuelve a sumar 5 o 6 al resultado anterior y, finalmente, se le resta 5 o 6 al último resultado y se obtiene 78. Entonces el número n es
   (a) 10
   (b) 12
   (c) 14
   (d) 15

5. En una heladería se ofrecen 13 sabores de helado y dos tipos de cobertura. La cantidad de formas en que se pueden combinar los sabores al comprar un cono con dos bolas de helado y una cobertura es

   (a) 133
   (b) 169
   (c) 263
   (d) 338

6. La expresión $\dfrac{2x^2-8}{1-\sqrt{x-1}}$ es equivalente a

   (a) $(x+4)\left(1+\sqrt{x-1}\right)$

   (b) $(x-4)\left(1-\sqrt{x-1}\right)$

   (c) $2\,(x-2)\left(1-\sqrt{x-1}\right)$

   (d) $-2\,(x+2)\left(1+\sqrt{x-1}\right)$

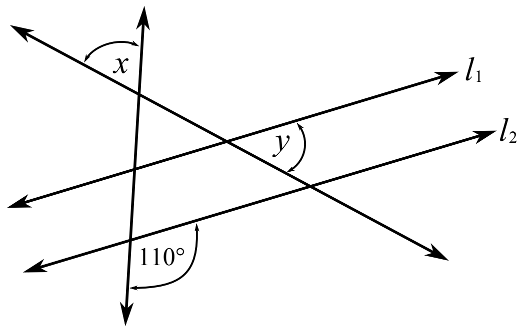
7. Cuatro amigas (Ana, Cristina, Diana y Elsa) se reúnen durante el recreo para comer. Cada una trajo exactamente un refresco y una fruta. Si sabemos que:

   - Ana y Elsa no trajeron refresco de limón.
   - Dos amigas son hermanas y trajeron todo igual.
   - Hubo exactamente una muchacha que trajo refresco de limón.
   - Elsa y Cristina son las únicas que trajeron, cada una, una pera.
   - Exactamente una trajo un limón y refresco de limón.

   Entonces, las hermanas son

   (a) Cristina y Elsa
   (b) Cristina y Diana
   (c) Ana y Cristina
   (d) Elsa y Diana

8. En la figura adjunta $l_1 \parallel l_2$. Si $m\angle y = m\angle x - 20°$, entonces $m\angle x$ es



(a) 25°

(b) 45°

(c) 65°

(d) 70°

9. Al vestirse una persona debe seleccionar entre 4 camisas (una azul, una gris y dos verdes) y 3 pantalones (uno negro y dos azules). La probabilidad de que este día la persona vista una camisa gris es

(a) $\frac{1}{4}$

(b) $\frac{1}{3}$

(c) $\frac{2}{3}$

(d) $\frac{1}{12}$

10. La expresión $\dfrac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \dfrac{2a\sqrt{b} - 2b\sqrt{a}}{a-b}$ es equivalente a

(a) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$

(b) $\sqrt{a} - \sqrt{b}$

(c) $a + b$

(d) $a - b$

11. Sea n un número par múltiplo de 7 y menor que 1 000, tal que la suma de sus dígitos es 23 y su residuo al dividirlo por 5 es 1. La cantidad de números n que cumplen con lo anterior es

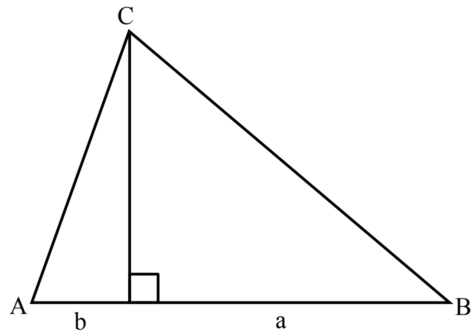
(a) 0

(b) 1

(c) 2

(d) 3

12. En la figura adjunta $AB = x$, $AC = x - 1$ y $BC = x + 1$, con certeza $a - b$ es



(a) 1

(b) 2

(c) 4

(d) 5

13. Al efectuar $\dfrac{\left(\dfrac{4a}{b} - \dfrac{b}{a}\right)^{-1}}{\left(\dfrac{4a}{b} - 4 + \dfrac{b}{a}\right)^{-1}}$ se obtiene como resultado

(a) 1

(b) -1

(c) $\dfrac{2a-b}{2a+b}$

(d) $\dfrac{2a+b}{2a-b}$

14. Se define el número $S_n = 1^1 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^n$. Entonces el dígito de las unidades del número S_{10} corresponde a

(a) 2

(b) 3

(c) 7

(d) 9

15. En un edificio de apartamentos viven 105 personas; de ellas, el número de parejas casadas es la tercera parte del número de hombres solteros y el número de mujeres solteras es el doble del número de hombres casados. El número total de hombres que viven en el edificio es

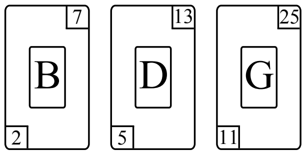
(a) 15

(b) 30

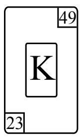
(c) 45

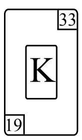
(d) 60

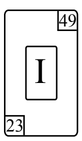
16. En la sala de espera de un banco entregan fichas a sus clientes; a continuación se presentan tres de estas fichas consecutivas

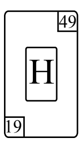


La ficha que sigue en la secuencia es

(a) 

(b) 

(c) 

(d) 

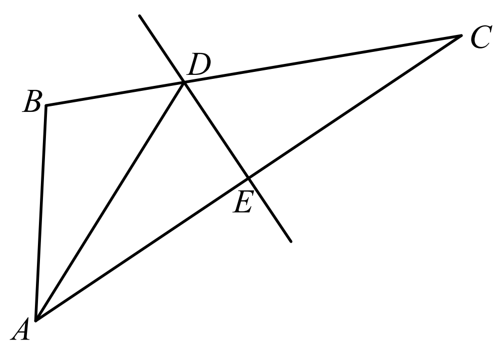
17. En la figura adjunta $\overleftrightarrow{DE}$ es la mediatriz del ΔABC sobre el lado $\overline{AC}$ y $m\angle BDA = 50°$. La medida, en grados, del $\angle BCA$ es

(a) 15

(b) 25

(c) 30

(d) 45



18. Sea a_n el término n en la sucesión $1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots$
Sea b_n el dígito de las unidades de a_n. Con ellos formamos una nueva sucesión $1, 3, 6, 0, 5, 1, \ldots$
El término $2\,015$ en la sucesión b_n es

    (a) 9
    (b) 5
    (c) 1
    (d) 0

19. El número entero positivo n es tal que la suma de los cuadrados de sus dígitos es 50 y cada dígito es mayor que el dígito a su izquierda. El producto de los dígitos del menor n que es un número compuesto corresponde a

    (a) 7
    (b) 25
    (c) 36
    (d) 48

20. Sea ΔABC isósceles, tal que $AC = BC = 20$ cm y sea D un punto cualquiera de $\overline{AB}$ (distinto de A y distinto de B). Por D se trazan una recta paralela a $\overline{AC}$ que corta a $\overline{BC}$ en E y una recta paralela a $\overline{BC}$ que corta a $\overline{AC}$ en F. El perímetro, en centímetros, del $\square CEDF$ es

    (a) 20
    (b) 30
    (c) 40
    (d) 50

21. Si la suma de dos números es 2 y su producto es -2, entonces la suma de los cuadrados de dichos números corresponde a

    (a) 2
    (b) 4
    (c) 8
    (d) 10

22. Sean a, b, c, d y e números naturales consecutivos cuya suma es un cubo perfecto y $b + c + d$ es cuadrado perfecto. La suma de las cifras del menor c es

(a) 17
(b) 18
(c) 19
(d) 20

23. Sea $abcd$ un número de cuatro dígitos tales que

$$abcd + 7911 = bcda$$

La cantidad de números que cumplen lo anterior es

(a) 0
(b) 1
(c) 2
(d) 3

24. Sea el ΔABC tal que D es el punto medio de $\overline{AB}$, E es el punto medio de $\overline{DB}$ y F es el punto medio de $\overline{BC}$. Si el área del ΔABC es 72 cm^2, entonces el área, en cm^2, del ΔAEF es

(a) 18
(b) 24
(c) 27
(d) 36

25. Considere el ΔABC de la figura adjunta, donde F es el punto medio de $\overline{CB}$, G es el punto medio de $\overline{AC}$, H es un punto cualquiera de $\overline{AB}$ con E y D tales que $AE = EH$ y $HD = DB$. Si h representa la medida en centímetros de la altura del ΔABC sobre el lado $\overline{AB}$ y $AB = 20$ cm, el área, en centímetros cuadrados del ΔAEG, es

(a) $h\,(10 - x)$
(b) $\dfrac{h}{2}\,(10 - x)$
(c) $\dfrac{h}{4}\,(10 - x)$
(d) $\dfrac{h}{8}\,(10 - x)$