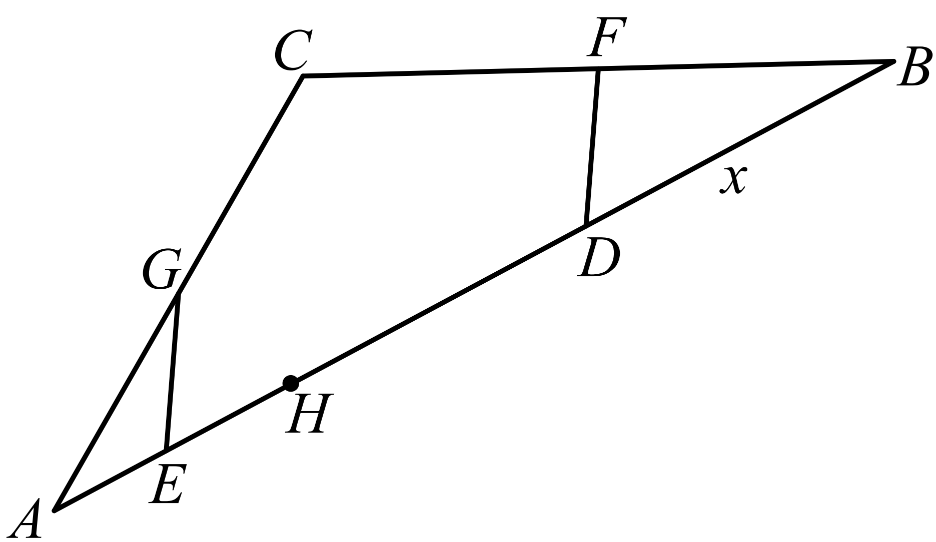
XXVII OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA

UNA - UCR - TEC - UNED - MEP - MICIT

SOLUCIÓN PRIMERA ELIMINATORIA NACIONAL



II Nivel

$(8^\circ - 9^\circ)$

2015

1. Si $m = \sqrt[n]{4^{2-n}}$ el valor numérico de $(4m)^{\frac{3n}{2}}$ corres-ponde a

   (a) 2
   (b) 4
   (c) 16
   (d) 64

   - Opción correcta: $d)$
   - Solución:

$$\begin{aligned}(4m)^{\frac{3n}{2}} &= \left(4\sqrt[n]{4^{2-n}}\right)^{\frac{3n}{2}}\\ &= \left(4^n \cdot 4^{2-n}\right)^{\frac{3}{2}}\\ &= \left(4^2\right)^{\frac{3}{2}}\\ &= 64\end{aligned}$$

2. Se saca una carta de una baraja de 52 naipes, sin volver a reponer esta, luego se saca otra. La baraja tiene 26 cartas rojas. Si la primera carta que se sacó es roja, la probabilidad de que la siguiente también lo sea es

   (a) $\dfrac{25}{51}$
   (b) $\dfrac{25}{52}$
   (c) $\dfrac{26}{51}$
   (d) $\dfrac{26}{52}$

   - Opción correcta: $a)$
   - Solución:
     Una baraja cuenta con 52 cartas, de las cuales 26 son rojas, si sacamos una carta roja y no la reponemos, de las 51 cartas que quedan en la baraja 25 son rojas.
     Por lo que la probabilidad de que la siguiente carta también sea roja es de $\frac{25}{51}$.

3. Al efectuar $\left(b - \dfrac{1}{b}\right) \div \dfrac{b+1}{b^2} - \dfrac{1}{b^{-2}}$ se obtiene

   (a) 1

   (b) b

   (c) -1

   (d) $-b$

- Opción correcta: d)
- Solución:

$$\begin{aligned}
\left(b-\frac{1}{b}\right)\div\frac{b+1}{b^2}-\frac{1}{b^{-2}} &= \frac{b^2-1}{b}\cdot\frac{b^2}{b+1}-b^2\\
&= \frac{(b+1)(b-1)}{b}\cdot\frac{b^2}{b+1}-b^2\\
&= (b-1)\,b-b^2\\
&= b^2-b-b^2\\
&= -b
\end{aligned}$$

4. Un número entero n se multiplica por 5 o 6, luego se le suma 5 o 6 al resultado, después se le vuelve a sumar 5 o 6 al resultado anterior y, finalmente, se le resta 5 o 6 al último resultado y se obtiene 78. Entonces el número n es

   (a) 10
   (b) 12
   (c) 14
   (d) 15

   - Opción correcta: b)
   - Solución:
     Se obtuvieron 4 resultados antes de 78. En el cuarto los números podrían ser 83 o 84, en el tercero $77, 78$ o 79, en el segundo $71, 72, 73$ o 74 y como el primer resulatdo es múltiplo de 6 o 5, la única posibilidad es 72. Por lo tanto, $n=\dfrac{72}{6}=12$.

5. En una heladería se ofrecen 13 sabores de helado y dos tipos de cobertura. La cantidad de formas en que se pueden combinar los sabores al comprar un cono con dos bolas de helado y una cobertura es

   (a) 133
   (b) 169
   (c) 263
   (d) 338

   - Opción correcta: d)
   - Solución:
     Para los sabores podemos escoger los sabores del helado y luego la cobertura de las siguientes maneras $13\cdot 13\cdot 2=338$

6. La expresión $\dfrac{2x^2-8}{1-\sqrt{x-1}}$ es equivalente a

   (a) $(x+4)\left(1+\sqrt{x-1}\right)$
   (b) $(x-4)\left(1-\sqrt{x-1}\right)$
   (c) $2\,(x-2)\left(1-\sqrt{x-1}\right)$
   (d) $-2\,(x+2)\left(1+\sqrt{x-1}\right)$

   - Opción correcta: *d*)
   - Solución:
     Racionalizando:

$$\begin{aligned}
\frac{2x^2-8}{1-\sqrt{x-1}} &= \frac{2x^2-8}{1-\sqrt{x-1}}\cdot\frac{1+\sqrt{x-1}}{1+\sqrt{x-1}}\\
&= \frac{2(x^2-4)(1+\sqrt{x-1})}{1-(x-1)}\\
&= \frac{2(x-2)(x+2)(1+\sqrt{x-1})}{2-x}\\
&= -2(x+2)(1+\sqrt{x-1})
\end{aligned}$$

7. Cuatro amigas (Ana, Cristina, Diana y Elsa) se reúnen durante el recreo para comer. Cada una trajo exactamente un refresco y una fruta. Si sabemos que:

   - Ana y Elsa no trajeron refresco de limón.
   - Dos amigas son hermanas y trajeron todo igual.
   - Hubo exactamente una muchacha que trajo refresco de limón.
   - Elsa y Cristina son las únicas que trajeron, cada una, una pera.
   - Exactamente una trajo un limón y refresco de limón.

   Entonces, las hermanas son

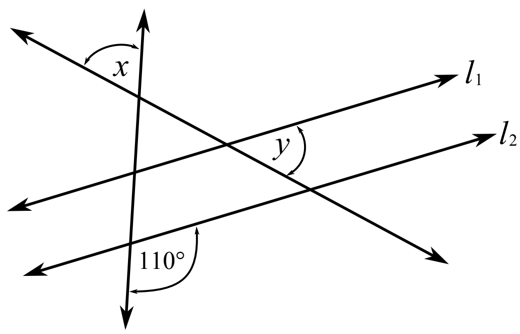
   (a) Cristina y Elsa
   (b) Cristina y Diana
   (c) Ana y Cristina
   (d) Elsa y Diana

   - Opción correcta: *a*)
   - Solución:
     Ana y Elsa no trajeron refresco de limón, por lo que dicho refresco lo trajo Diana o Cristina. Pero como Cristina trajo una pera y quien trajo refresco de limón trajo también un limón, entonces Diana trajo fresco de limón. Por lo tanto, diana no es una de las hermanas.

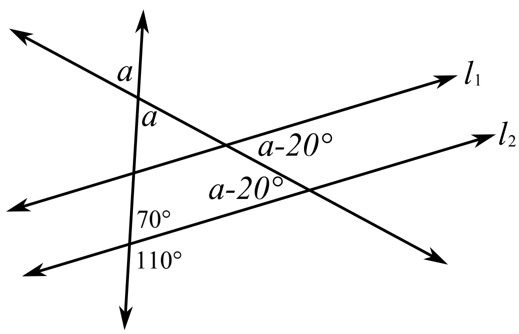
     Ahora bien, Ana no trajo una pera, por lo que no puede ser hermana de Elsa o de Cristina. Por lo tanto, Elsa y Cristina son hermanas.

8. En la figura adjunta $l_1 \parallel l_2$. Si $m\angle y = m\angle x - 20°$, entonces $m\angle x$ es

   (a) $25°$
   (b) $45°$
   (c) $65°$
   (d) $70°$



   - Opción correcta: c)
   - Solución:
     En la figura se colocan las medidas de los tres ángulos internos de un triángulo. Si a representa la medida en grados del ángulo x, se tienen las tres medidas en mención: a por ser opuesto por el vértice, $70°$ por ser ángulo suplementario y $a - 20°$ por ser ángulo alterno interno.



     Luego, $a + 70° + a - 20° = 180° \Rightarrow a = \dfrac{180° - 50°}{2} = 65°$.

9. Al vestirse una persona debe seleccionar entre 4 camisas (una azul, una gris y dos verdes) y 3 pantalones (uno negro y dos azules). La probabilidad de que este día la persona vista una camisa gris es

   (a) $\dfrac{1}{4}$
   (b) $\dfrac{1}{3}$
   (c) $\dfrac{2}{3}$
   (d) $\dfrac{1}{12}$

   - Opción correcta: a)
   - Solución:
     De entre cuatro camisas puede elegir tres colores disponibles, mientras que entre tres pantalones puede elegir entre dos colores. Por lo que las formas en que puede combinar los colores son $3 \cdot 4 = 12$, de entre los cuales, hay 3 formas de vestir camisa gris, o con el pantalón negro o con alguno de los azules.
     Por lo que la probabilidad de que vista una camisa gris es de $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

10. La expresión $\dfrac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \dfrac{2a\sqrt{b}-2b\sqrt{a}}{a-b}$ es equivalente a

   (a) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$
   (b) $\sqrt{a}-\sqrt{b}$
   (c) $a+b$
   (d) $a-b$

   - Opción correcta: $a)$
   - Solución:
     Racionalizando:

$$\begin{aligned}
\frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{2a\sqrt{b}-2b\sqrt{a}}{a-b} &= \frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \frac{2a\sqrt{b}-2b\sqrt{a}}{a-b} \\
&= \frac{a\sqrt{a}-a\sqrt{b}+b\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{a-b} + \frac{2a\sqrt{b}-2b\sqrt{a}}{a-b} \\
&= \frac{a\sqrt{a}+a\sqrt{b}-b\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{a-b} \\
&= \frac{a(\sqrt{a}+\sqrt{b})-b(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b} \\
&= \frac{(a-b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b} = \sqrt{a}+\sqrt{b}
\end{aligned}$$

11. Sea n un número par múltiplo de 7 y menor que 1 000, tal que la suma de sus dígitos es 23 y su residuo al dividirlo por 5 es 1. La cantidad de números n que cumplen con lo anterior es

   (a) 0
   (b) 1
   (c) 2
   (d) 3

   - Opción correcta: $b)$
   - Solución:
     Como al dividirlo por 5 su residuo es 1 y es un número par, entonces el dígito de las unidades es 6. Ahora, como la suma de los dígitos es 23 y es menor que 1000, debe ser de 3 dígitos y uno 6 entonces, la suma de los otros dos es 17 por lo que al ser dígitos son 9 y 8. Por último, los posibles números son 986 y 896, donde el múltiplo de 7 es 896. Por lo tanto, el único valor de n es 896.

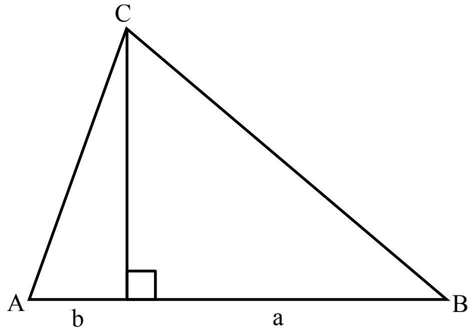
12. En la figura adjunta $AB = x$, $AC = x - 1$ y $BC = x + 1$, con certeza $a - b$ es

(a) 1

(b) 2

(c) 4

(d) 5



- Opción correcta: c)
- Solución:
  Con base en el teorema de Pitágoras,

$$\begin{aligned} & (x+1)^2 - a^2 = (x-1)^2 - b^2 \\ \Rightarrow\ & x^2 + 2x + 1 - a^2 = x^2 - 2x + 1 - b^2 \\ \Rightarrow\ & 4x = a^2 - b^2 \\ \Rightarrow\ & 4x = (a-b)(a+b) \end{aligned}$$

Luego, dado que $AB = x = a + b$, se concluye que $4 = a - b$.

13. Al efectuar $\dfrac{\left(\dfrac{4a}{b} - \dfrac{b}{a}\right)^{-1}}{\left(\dfrac{4a}{b} - 4 + \dfrac{b}{a}\right)^{-1}}$ se obtiene como resultado

(a) 1

(b) -1

(c) $\dfrac{2a-b}{2a+b}$

(d) $\dfrac{2a+b}{2a-b}$

- Opción correcta: c)
- Solución:

$$\begin{aligned} \frac{\left(\dfrac{4a}{b} - \dfrac{b}{a}\right)^{-1}}{\left(\dfrac{4a}{b} - 4 + \dfrac{b}{a}\right)^{-1}} &= \frac{\dfrac{4a}{b} - 4 + \dfrac{b}{a}}{\dfrac{4a}{b} - \dfrac{b}{a}} \\ &= \frac{\dfrac{4a^2 - 4ab + b^2}{ab}}{\dfrac{4a^2 - b^2}{ab}} \\ &= \frac{(2a-b)^2}{(2a-b)(2a+b)} \\ &= \frac{2a-b}{2a+b} \end{aligned}$$

14. Se define el número $S_n = 1^1 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^n$. Entonces el dígito de las unidades del número S_{10} corresponde a

    (a) 2
    (b) 3
    (c) 7
    (d) 9

    - Opción correcta: c)
    - Solución:
      Basta con sumar el dígito de las unidades de cada potencia $1^1, 2^2, 3^3, \cdots, 10^{10}$. De 1^1 es $1, 2^2$ es $4, 3^3$ es $7, 4^4$ es $6, 5^5$ es $5, 6^6$ es $6, 7^7$ cada 4 potencias se repiten los dígitos $7, 9, 3, 1$ por lo que es $3, 8^8$ cada 4 potencias se repiten los dígitos $8, 4, 2, 6$ por lo que es $6, 9^9$ cada 2 potencias se repiten los dígitos $9, 1$ por lo que es 9 y 10^{10} es 0. Así, $1+4+7+6+5+6+3+6+9+0 = 47$. Por lo tanto, el dígito es 7.

15. En un edificio de apartamentos viven 105 personas; de ellas, el número de parejas casadas es la tercera parte del número de hombres solteros y el número de mujeres solteras es el doble del número de hombres casados. El número total de hombres que viven en el edificio es

    (a) 15
    (b) 30
    (c) 45
    (d) 60

    - Opción correcta: d)
    - Solución: Sea x el número de parejas casadas, observe que:

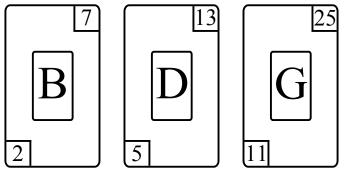
Género	Casados	Solteros
Hombres	x	$3x$
Mujeres	x	$2x$

Entonces $x + x + 3x + 2x = 105$, de donde $x = 15$

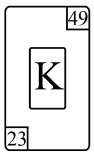
Genero	Casados	Solteros
Hombres	$x = 15$	$3x = 45$
Mujeres	$x = 15$	$2x = 30$

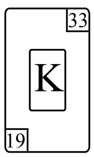
Por tanto hay 60 hombres

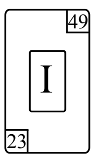
16. En la sala de espera de un banco entregan fichas a sus clientes; a continuación se presentan tres de estas fichas consecutivas

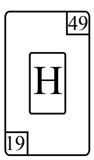


La ficha que sigue en la secuencia es

(a) 

(b) 

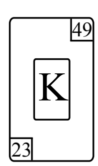
(c) 

(d) 

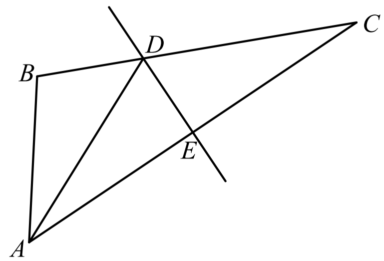
- Opción correcta: $a)$
- Solución:
  Al tomar el abecedario y marcar las letras que se encuentran en las primeras fichas vemos como se lleva a cabo la escogencia de estas, y que la siguiente en la lista es la K.
  A, **B**, C, **D**, E, F, **G**, H, I, J, **K**, L, M
  En la suceción de la esquina superior derecha observe que cada número es el doble del anterior, reducido en una unidad

  En cuanto a la sucesión inferior izquierda, cada número es el doble del anterior, aumentado en una unidad.

  Y así tenemos todos lo datos de la ficha, siendo la respuesta



17. En la figura adjunta $\overleftrightarrow{DE}$ es la mediatriz del ΔABC sobre el lado $\overline{AC}$ y m$\angle BDA = 50°$. La medida, en grados, del $\angle BCA$ es



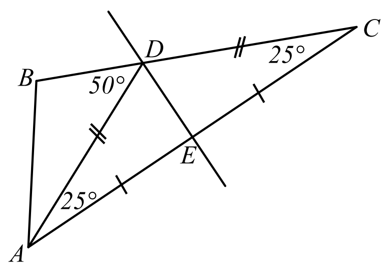
(a) 15

(b) 25

(c) 30

(d) 45

- Opción correcta: b)
- Solución:
  Como $\overleftrightarrow{DE}$ es mediatriz del ΔABC, se tiene que $EC = EA$ y $DC = DA$.
  Esto último indica que el ΔADC es isósceles, por lo que m$\angle DCA$ = m$\angle DAC = 25°$, ya que el ángulo externo $\angle BDA$ mide lo mismo que la suma de estos dos ángulos internos no adyacentes a él.



18. Sea a_n el término n en la sucesión $1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots$

Sea b_n el dígito de las unidades de a_n. Con ellos formamos una nueva sucesión $1, 3, 6, 0, 5, 1, \ldots$

El término 2 015 en la sucesión b_n es

(a) 9

(b) 5

(c) 1

(d) 0

- Opción correcta: d)
- Solución:
  La clave es notar que los elementos de la sucesión a_n se obtienen al sumarle n al elemento anterior, lo que hace que la sucesión a_n se pueda expresar como

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

De ahí vemos que la pregunta se transforma en encontrar el dígito de las unidades de a_{2015}, por lo que vemos que

$$a_{2015} = \frac{2015(2016)}{2} = 2015(1008),$$

que es un mútliplo de 10 por lo que su último dígito es 0.

19. El número entero positivo n es tal que la suma de los cuadrados de sus dígitos es 50 y cada dígito es mayor que el dígito a su izquierda. El producto de los dígitos del menor n que es un número compuesto corresponde a

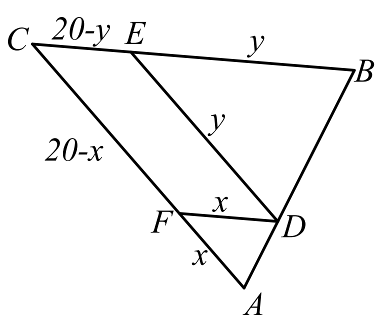
   (a) 7
   (b) 25
   (c) 36
   (d) 48

   - Opción correcta: *Ninguna*
   - Solución:
     Los cuadrados de los posibles dígitos que suman 50 son $1, 4, 9, 16, 25, 36$ y 49, de los cuales suman 50 los siguientes $1 + 49$, $25 + 25$, $9 + 16 + 25$ y $1 + 4 + 9 + 36$. Así, los números según la otra condición de los dígitos son 17, 345 y 1236, de donde el producto de los dígitos del menor número compuesto es $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$.

20. Sea ΔABC isósceles, tal que $AC = BC = 20$ cm y sea D un punto cualquiera de $\overline{AB}$ (distinto de A y distinto de B). Por D se trazan una recta paralela a $\overline{AC}$ que corta a $\overline{BC}$ en E y una recta paralela a $\overline{BC}$ que corta a $\overline{AC}$ en F. El perímetro, en centímetros, del $\square CEDF$ es

   (a) 20
   (b) 30
   (c) 40
   (d) 50

   - Opción correcta: c)
   - Solución:
     Los ángulos $\angle BAC$ y $\angle ABC$ son congruentes, pues ΔABC es isósceles; sea α la medida de dichos ángulos.
     Dado que $\overline{DF} \parallel \overline{BC}$ y $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$, se cumple que $\angle FDA \cong \angle CBA$ y $\angle BAC \cong \angle BDE$ por ser, respectivamente, ángulos correspondientes entre paralelas; todos estos con medida α. Así, son isósceles también los triángulos ΔAFD y ΔDEB.



     Sea $FA = FD = x$, $ED = EB = y$.
     El perímetro del $\square CEDF = (20 - y) + y + x + (20 - x) = 40$.

21. Si la suma de dos números es 2 y su producto es -2, entonces la suma de los cuadrados de dichos números corresponde a

    (a) 2
    (b) 4
    (c) 8
    (d) 10

    - Opción correcta: c)
    - Solución:
      Sean x, y según las condiciones del problema, es decir $x+y=2$, $xy=-2$.

$$\begin{aligned} x+y=2 \quad &\Rightarrow \quad (x+y)^2=4 \\ &\Rightarrow \quad x^2+2xy+y^2=4 \\ &\Rightarrow \quad x^2+2(-2)+y^2=4 \\ &\Rightarrow \quad x^2+y^2=8 \end{aligned}$$

22. Sean a, b, c, d y e números naturales consecutivos cuya suma es un cubo perfecto y $b+c+d$ es cuadrado perfecto. La suma de las cifras del menor c es

    (a) 17
    (b) 18
    (c) 19
    (d) 20

    - Opción correcta: b)
    - Solución:
      Sean $c-1, c-2, c, c+1, c+2$ los cinco consecutivos. Entonces $c-1+c-2+c+c+1+c+2=m^3$ con m entero $\Rightarrow 5c=m^3$
      $c-1+c+c+1=n^2$ con n entero $\Rightarrow 3c=n^2$
      Así, para que se cumpla, la descomposición canónica de c es $3^\alpha 5^\beta$ y el menor valor de c se obtiene cuando $\alpha=3$ y $\beta=2$. Por lo tanto, $c=3^3\cdot 5^2=675$ y la suma de sus cifras es 18.

23. Sea $abcd$ un número de cuatro dígitos tales que

$$abcd+7911=bcda$$

    La cantidad de números que cumplen lo anterior es

    (a) 0
    (b) 1
    (c) 2
    (d) 3

- Opción correcta: b)
- Solución:

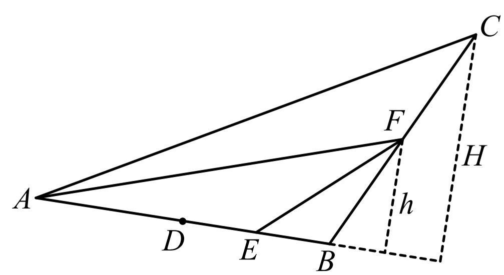
  Como $bcda$ es un número de cuatro cifras, entonces $a = 1$ o $a = 2$.
  Caso 1. Si $a = 1, 1bcd + 7911 = bcd1$ de donde $d = 0$ pues $d + 1$ termina en $1, c = 9$ pues $c + 1$ termina en $d = 0$. Así, $1b90 + 7911 = b901$ y $b = 9$ pues $9 + 1 + b$ termina en 9 y $7 + 1 + 1 = b$. Por lo tanto, $abcd = 1990$.
  Caso 2. Si $a = 2, 2bcd + 7911 = bcd2$ de donde $d = 1$ pues $d + 1$ termina en $2, c = 0$ pues $c + 1$ termina en $d = 1 \Rightarrow 2b01 + 7911 = b012$ y no existe b que cumpla la condición.
  Por lo tanto, 1990 es la única solución.

24. Sea el ΔABC tal que D es el punto medio de $\overline{AB}$, E es el punto medio de $\overline{DB}$ y F es el punto medio de $\overline{BC}$. Si el área del ΔABC es 72 cm^2, entonces el área en cm^2 del ΔAEF es

   (a) 18
   (b) 24
   (c) 27
   (d) 36

- Opción correcta: c)
- Solución:

  Dado que F es el punto medio de $\overline{BC}$, la altura h del ΔAEF de F a $\overline{AE}$ es la mitad de la altura H del ΔABC de C a $\overline{AB}$.



  La base $\overline{AE}$ del ΔAEF mide $\frac{3}{4} \cdot AB$, pues D es el punto medio de $\overline{AB}$ y E es el punto medio de $\overline{DB}$; así,

$$\begin{aligned}
\text{Área del } \Delta AEF &= \frac{1}{2} \cdot AE \cdot h \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} \cdot AB\right)\left(\frac{1}{2} \cdot H\right) \\
&= \frac{3}{8}\left(\frac{1}{2} \cdot AB \cdot H\right) \\
&= \frac{3}{8} \cdot 72 = 27
\end{aligned}$$

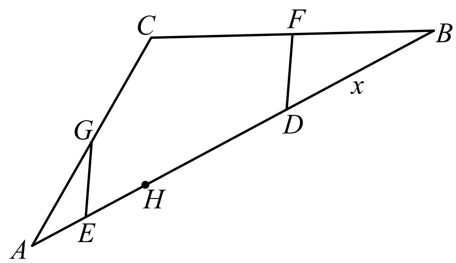
25. Considere el ΔABC de la figura adjunta, donde F es el punto medio de $\overline{CB}$, G es el punto medio de $\overline{AC}$, H es un punto cualquiera de $\overline{AB}$ con E y D tales que $AE = EH$ y $HD = DB$. Si h representa la medida en centímetros de la altura del ΔABC sobre el lado $\overline{AB}$ y $AB = 20$ cm, el área, en centímetros cuadrados del ΔAEG, es

(a) $h\,(10 - x)$

(b) $\dfrac{h}{2}\,(10 - x)$

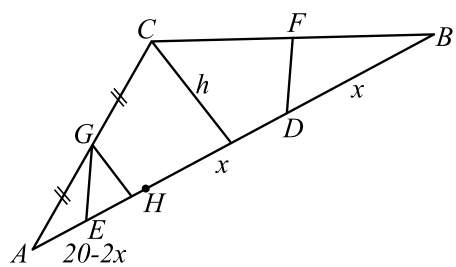
(c) $\dfrac{h}{4}\,(10 - x)$

(d) $\dfrac{h}{8}\,(10 - x)$



- Opción correcta: c)
- Solución:

  Considere las alturas de los triángulos ΔABC y ΔAEG sobre las bases respectivas $\overline{AB}$ y $\overline{AE}$. Como G es el punto medio de $\overline{AC}$, la altura de medida h_1 del ΔAEG es la mitad de la medida de la altura h del ΔABC.



Dado que $DB = x = HD$ y $AB = 20 - 2x$ cm, se tiene que $AH = 20 - 2x$, por lo que la base $\overline{AE}$ del ΔAEG mide $\dfrac{1}{2}\,(20 - 2x) = 10 - x$.

Luego, el área del $\Delta AEG = \dfrac{1}{2} \cdot AE \cdot h_1 = \dfrac{1}{2} \cdot (10 - x) \cdot \dfrac{h}{2} = \dfrac{h}{4}\,(10 - x)$.